Fòrum de Problemes
Cursos 1992–1993 i 1993–1994

SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES
Filial de l'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS
Carrer del Carme, 47 - 08001 Barcelona

Fòrum de Problemes
Cursos 1992–1993 i 1993–1994

D.L.: L-1701-1993

Imprimeix: Poblagràfic, S.A. Av. Estació, s/n.
La Pobla de Segur (Lleida)

El curs passat varem iniciar el **Fòrum de Problemes** i els que hi varem poder assistir considerem que l'experiència fou força interessant i que calia repetir-la enguany, millorant els defectes i mancances del curs passat.

L'objectiu d'aquest **Fòrum** és simplement una trobada entre aquelles persones que entenem les matemàtiques, no solament com una professió o una feina, sinó també com una eina d'esbarjo i de distracció, i que volem repassar coneixements ja oblidats, aprofundir-ne d'altres que potser coneixem molt pel damunt, descobrir-ne de nous o aspectes nous de coneixements vells. I tot això volem fer-ho tranquil·lament, sense massa tensions, tot resolent uns quants problemes de geometria, d'aritmètica, de càlcul, de combinatòria, etc.

El curs passat, l'objectiu fou a bastament acomplert com posen de manifest la trentena de problemes que varem discutir i resoldre conjuntament, sense cap mena d'intent de protagonisme, sinó simplement jugant amb ells, aprofundint-los i, si s'esqueia, completant-los i generalitzant-los. Ara, en invitar-vos al **Fòrum** que tindrà lloc aquest curs, us fem arribar els enunciats i solucions dels problemes que varem tractar per tal que, aquells que no vareu poder-hi assistir o no us va vagar de fer-ho, pogueu adonar-vos de la mena de qüestions que allà es van resoldre.

És cert que, el curs passat, hi va haver potser un xic massa d'improvització en la resolució dels problemes. Les sessions s'havien iniciat amb una col·lecció inicial de problemes —que es varen resoldre gairebé en la seva totalitat—, però l'entusiasme d'alguns dels participants va fer que les sessions s'allunyessin un xic del propòsit inicial: resoldre els problemes inicialment plantejats i reflexionar sobre ells, teòricament i sobretot didàctica. Ben cert que no s'exclou pas la possibilitat d'introduir, durant les sessions, nous problemes que permetin d'aprofundir en els temes que s'estan debatent. Però la intenció, no sempre acomplerta, és de fer-ho seguint la problemàtica que ha sorgit en el propi debat del **Fòrum**, provocat per la resolució —i, a voltes, per l'intent de resolució— concreta dels problemes que s'han anat tractant.

També és possible de presentar problemes *més difícils* els quals poden ser resolts en acabar-se el **Fòrum** per tots els que hi estiguin interessats o bé dedicant-los alguna sessió extraordinària que caldrà concretar.

Amb tot, i per tal de poder conduir més ordenadament el **Fòrum** d'enguny, us oferim ja des d'ara mateix una col·lecció d'una seixantena de problemes, agrupats de sis en sis. La intenció és de resoldre'n [o almenys d'intentar-ho] sis en cada una de les sessions. Tots els que hi assistim podem participar-hi activament, exposant les nostres reflexions, els nostres dubtes, les nostres limitacions, els nostres encerts i tot allò que els problemes ens hagin suggerit.

Creiem que la iniciativa és excel·lent i una prova d'aquesta creença la constitueix l'èxit que han tingut les *sessions de problemes* per a estudiants de BUP i COU que pensen presentar-se a l'*Olimpíada Matemàtica*. La iniciativa de realitzar aquestes sessions va sorgir en el **Fòrum** del curs passat i l'han dut a terme professors de les quatre universitats que hi van assistir. És ben probable que aquesta iniciativa trobi continuïtat en els propers anys i també és possible que tú vulguis dir-hi quelcom, desitgis participar-hi, intervenir-hi d'alguna manera ··· Una manera de fer-ho és a partir del **Fòrum de Problemes** on, així ho espero, ens aplegarem tots els interessats en aquestes qüestions.

La nostra intenció és *lúdica*, però som conscients del món real en el qual vivim. Per això estem intentant d'aconseguir que aquest **Fòrum** sigui acceptat per la Generalitat com idoni per a aconseguir mèrits de promoció per professors d'ensenyament no universitari. Per aquesta raó hem pensat que fora bó que el **Fòrum** tingués trenta hores de durada total, distribuïdes en deu sessions, en setmanes alternes, de tres hores de durada cada una.

La primera trobada tindrà lloc als locals de l'**Institut d'Estudis catalans** el proper dimarts dia 18 de gener a partir de les $18^{h}\,30^{m}$ i començarem amb els sis primers problemes de la pàgina 52.

Anima't i vine. T'ho passaràs d'allò més be. T'hi esperem!

Problemes resolts en el decurs del curs 1992–1993

Entre els problemes que usualment es proposen a les Olimpíades Matemàtiques Internacionals, és força habital trobar-ne dels següents tipus:

Problemes d'"ofici matemàtic"

Anomenen així aquells problemes la resolució dels quals depèn de l'ofici matemàtic més que no pas de la idea feliç. Tracten de temes com ara:

Trigonometria;
Nombres complexos;
Successions i llurs límits;
Sèries;
Funcions.

Problemes de Geometria

Hi ha força problemes de geometria, tant de geometria plana com de l'espai. Molts d'ells giren al voltant de la geometria del triangle: construccions, desigualtats, qüestions relatives a l'àrea, etc. De fet, molts d'aquests problemes són alhora problemes d'ofici, però a l'actualitat, molts de nosasltres no hem rebut massa formació de Geometria Sintètica i aquests problemes representen un repte ben diferent del que podien haver representat en d'altres èpoques.

Problemes de Teoria de Nombres

Potser són el més abundants. Malgrat que molts són d'idea feliç, tenen l'interès que normalment es poden resoldre de diverses maneres i els intents de resolució aporten elements de coneixement força importants al voltant de temes com ara: descomposició en nombres primers, indicador d'Euler, suma dels divisors, congruències, etc.

Problemes lúdics

Problemes amb un enunciat "divertit" i la resolució dels quals es pot fer d'una manera més aviat enginyosa sense necessitat de grans matematitzacions. No són pas massa freqüents, però són interessants per la seva pròpia naturalesa.

A la llista que segueix suggerim problemes dels quatre tipus. El fet que un problema es trobi en un lloc o bé en un altre no vol dir pas que s'hagi de fer necessàriament d'una certa manera. És solament una manera d'organitzar-los. I sovint hi ha diverses maneres de resoldre'ls, algunes són "d'idea feliç", mentre que d'altres són "d'ofici".

Problemes d'ofici

1. (Newton) Trobeu una fórmula tancada per a l'expressió:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx.$$

Primera solució

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx &= \operatorname{Img}\left(e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{nix}\right) = \\
= \operatorname{Img}\frac{e^{inx}e^{ix} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} &= \operatorname{Img}\frac{e^{ix}\left(e^{inx} - 1\right)\left(e^{-ix} - 1\right)}{\left(e^{ix} - 1\right)\left(e^{-ix} - 1\right)} = \\
= \operatorname{Img}\frac{e^{inx} - 1 - e^{i(n+1)x} + e^{ix}}{2 - 2\cos x} &= \frac{\sin nx - \sin(n+1)x + \sin x}{2(1 - \cos x)} = \\
= \frac{2\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\sin\left(-\frac{x}{2}\right) + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} &= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\,\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Segona solució

Cal tenir en compte que

$$2\sin\frac{\delta}{2}\sin(x + k\delta) = \cos\left(x + \frac{2k-1}{2}\delta\right) - \cos\left(x + \frac{2k+1}{2}\delta\right)$$

Aleshores

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{\delta}{2}\sin x &= \cos\left(x - \frac{\delta}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{\delta}{2}\right); \\
2\sin\frac{\delta}{2}\sin(x + \delta) &= \cos\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{3}{2}\delta\right); \\
&\ \vdots \\
2\sin\frac{\delta}{2}\sin(x + (n-1)\delta) &= \cos\left(x + \frac{2n-3}{2}\delta\right) - \cos\left(x + \frac{2n-1}{2}\delta\right).
\end{aligned}$$

Per tant,

$$2\sin\frac{\delta}{2}\left[\sin x + \cdots + \sin(x + (n-1)\delta)\right] = \cos\left(x - \frac{\delta}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{2n-1}{2}\delta\right).$$

Ara fem $\delta = x$ i obtenim

$$2\sin\frac{x}{2}\left[\sin x + \cdots + \sin nx\right] = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x = 2\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}$$

i finalment,

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n}{2}x \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

2. Donat el polinomi $x^3 + px^2 + qx + r$, trobeu les condicions que han de complir els coeficients p, q, i r per tal que les tres arrels del polinomi formin un triangle equilàter del pla complex.

Solució

Siguin z_1, z_2 i z_3 les arrels i z_0 el centre del triangle. Si z és el vector complex que va de z_0 a z_1, tindrem $z_1 = z_0 + z \cdot 1, z_2 = z_0 + z \cdot \epsilon, z_3 = z_0 + z \cdot \eta$, on $1, \epsilon$ i η són les arrels cúbiques de la unitat; el seu producte és 1, la seva suma és 0 i la suma de productes de dues en dues és 0.

$$\begin{aligned} -p &= \sum z_i = 3z_0; \\ q &= \sum_{i<j} z_i z_j = 3z_0^2; \\ -r &= z_1 z_2 z_3 = z_0^3 + z^3. \end{aligned}$$

D'aquestes relacions en surt que

$$q = \frac{p^2}{3}.$$

Recíprocament, si es compleix aquesta última relació entre p i q llavors fent el canvi $x = y - \frac{p}{3}$, l'equació es converteix en

$$y^3 + \frac{p^3}{27} + r = 0$$

que té solucions $y_1 = \alpha, y_2 = \alpha \cdot \epsilon$ i $y_3 = \alpha \cdot \eta$, on α és l'arrel cúbica real de $-r - \frac{p^3}{27}$. Resulta $x_1 = -\frac{p}{3} + \alpha, x_2 = -\frac{p}{3} + \alpha \cdot \epsilon$ i $x_3 = -\frac{p}{3} + \alpha \cdot \eta$, que són els vèrtexs d'un triangle equilàter.

3. (OI 1962) Resoleu l'equació $\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1$.

Primera solució

Es compleix

$$\begin{aligned}
\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \cos^2 3x &= 1\\
\cos 2x + \cos 4x + \cos^2 3x &= 0\\
2\cos 3x \cos x + \cos^2 3x &= 0\\
\cos 3x\,(2\cos x + \cos 3x) &= 0\\
\cos 3x\,(\cos x + 2\cos x \cos 2x) &= 0\\
\cos 3x \cos x\,(1 + 2\cos 2x) &= 0
\end{aligned}$$

i aquesta equació té solucions

$$\begin{array}{lclcl}
\cos 3x = 0, & & x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}, & & k \in \mathbb{Z};\\
\cos x = 0, & & x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, & & k \in \mathbb{Z};\\
\cos 2x = -\dfrac{1}{2}, & & x = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{2\pi}{6} + k\pi\\ \dfrac{4\pi}{6} + k\pi\end{array}\right. & & , k \in \mathbb{Z}.
\end{array}$$

Segona solució

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \cos^2 x;\\
\cos^2 2x &= \left[2\cos^2 x - 1\right]^2 = 1 - 4\cos^2 x + 4\cos^4 x;\\
\cos^2 3x &= \left[4\cos^3 x - 3\cos x\right]^2 = 9\cos^2 x - 24\cos^4 x + 16\cos^6 x.
\end{aligned}$$

D'on:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 16\cos^6 x - 20\cos^4 x + 6\cos^2 x + 1 = 1.$$

Si resolem ara aquesta equació, obtenim

$$\cos^2 x = 0, \qquad 8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3 = 0.$$

És a dir,

$$\cos x = 0, \quad \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

i hem acabat.

4. (OI 1965) Considereu el sistema d'equacions

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

amb incògnites x_1, x_2, x_3. Els coeficients satisfan les condicions

(a) a_{11}, a_{22}, a_{33} són nombres positius;
(b) els altres coeficients són nombres negatius;
(c) a cada equació, la suma dels coeficients és positiva.

Demostreu que el sistema proposat només té la solució $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Solució

En ser el sistema homogeni solament cal veure que la matriu dels coeficients

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}+a_{12}+a_{13}) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (a_{21}+a_{22}+a_{23}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (a_{31}+a_{32}+a_{33}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

té determinant no nul. Però, com que tots els parèntesis són positius, el segon determinant és negatiu i el tercer positiu, podrem assegurar que el determinant de la matriu del sistema és positiu si demostrem que

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Ara bé,

$$\begin{aligned} a_{21}+a_{22}+a_{23} > 0 \quad &\Rightarrow \quad a_{22} > -a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} > 0 \quad &\Rightarrow \quad a_{33} > -a_{32} \end{aligned}$$

i per tant

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32} = a_{22}\,a_{33} - (-a_{23})\,(-a_{32}) > a_{22}\,a_{33} - a_{22}\,a_{33} = 0.$$

5. (OI 1963) Demostreu que $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Primera solució

Multiplicant i dividint l'expressió $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$ per $2\sin\frac{\pi}{7}$ es té:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{2\pi}{7} - \left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}.$$

Segona solució

Com que

$$-\cos\frac{2\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = \cos\frac{5\pi}{7},$$

la suma de l'enunciat esdevé

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}.$$

Siguin $1_{\frac{\pi}{7}}, 1_{\frac{3\pi}{7}}, 1_{\frac{5\pi}{7}}, -1, 1_{\frac{9\pi}{7}}, 1_{\frac{11\pi}{7}}, 1_{\frac{13\pi}{7}}$ les arrels de l'equació $x^7 + 1$, la suma de les quals és igual a 0, o equivalentment

$$1_{\frac{\pi}{7}} + 1_{\frac{3\pi}{7}} + 1_{\frac{3\pi}{7}} + 1_{\frac{9\pi}{7}} + 1_{\frac{11\pi}{7}} + 1_{\frac{13\pi}{7}} = 1.$$

La part real de l'anterior suma també és 1.

Així doncs

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{9\pi}{7} + \cos\frac{11\pi}{7} + \cos\frac{13\pi}{7} = 1,$$

però de $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ se'n dedueix que

$$2\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) = 1$$

i d'ací el resultat.

6. (OI 1976) Sigui $P_1(x) = x^2 - 2$ i $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ per a $j = 2, 3, \ldots$. Demostreu que, per a qualsevol enter positiu n, les arrels de l'equació $P_n(x) = x$ són totes reals i diferents.

Primera solució

$P_1(x) = x^2 - 2$ té dos zeros a $\pm\sqrt{2}$ i un mínim al punt 0 on pren el valor -2.

$P_2(x)$ té dos mínims als punts $\pm\sqrt{2}$ on pren el valor -2 i un màxim al punt 0 on pren el valor 2. Com que $P_2(2) = P_2(-2)$ resulta que $P_2(2)$ ha de tenir 4 zeros.

Es pot demostrar per inducció sobre n que

a) $P_n(x)$ té 2^n zeros diferents α_i.
b) $P_n(x)$ té 2^{n-1} mínims β_j, on $P_n(\beta_j) = -2$.
c) $P_n(x)$ té $2^{n-1} - 1$ màxims γ_k, on $P_n(\gamma_k) = 2$.
d) $P_n(2) = P_n(-2) = 2$.
e) Tots els α_i, β_j i γ_k són diferents.

A la demostració cal tenir present que els zeros de P_n passen a ser mínims de P_{n+1} i que els màxims i mínims de P_n es converteixen en màxims de P_{n+1}.

A l'interval $[-2, 2]$ la funció polinòmica $F_n(x) = P_n(x) - x$ és positiva en els punts on P_n val 2, i és negativa en els punts on P_n val -2. Per tant s'ha d'anul·lar en 2^n punts diferents.

Nota. Els polinomis P_i estan relacionats amb els polinomis de Čebyšev a través de la relació

$$P_n(x) = 2T_{2^n}(x/2).$$

Segona solució

Sabem que

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1.$$

Fem $x(t) = 2\cos t$. Aleshores

$$\begin{aligned}
&P_1(x(t)) = 4\cos^2 t - 2 = 2\cos 2t;\\
&P_2(x(t)) = P_1(P_1(x(t))) = 2\cos 4t;\\
&\quad\ldots \qquad\qquad \ldots\\
&P_n(x(t)) = 2\cos 2^n t.
\end{aligned}$$

Ara volem que $P_n(x(t)) = x(t)$, que en aquest context es transforma en $2\cos 2^n t = 2\cos t$. D'on:

$$\cos 2^n t = \cos t \quad \text{ssi} \quad 2^n t = \pm t + 2k\pi.$$

Finalment,

$$t = \frac{2k\pi}{2^n - 1} \quad \text{i} \quad t = \frac{2k\pi}{2^n + 1}.$$

Problemes de geometria del triangle

7. (OI 1959) Construïu un triangle rectangle amb hipotenusa donada c de manera que la mediana corresponent a la hipotenusa sigui la mitja geomètrica dels dos catets del triangle.

Primera solució

Fem un cercle de diàmetre c. Hem de buscar un triangle rectangle amb el vèrtex damunt de la semicircumferència. Tot rau a trobar-li l'alçada h. Sabem que la seva àrea és $\frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$. D'on $ab = ch$. D'altra banda $ab = \frac{c^2}{4}$. Per tant $h = \frac{c}{4}$.

Segona solució

D'una banda sabem que la mediana $m = \frac{c}{2}$, ja que són radis d'una mateixa circumferència. Volem que $m^2 = a \cdot b = \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Aleshores, com que

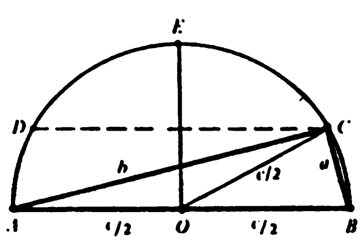
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2a \cdot b &= (a+b)^2, \\ a^2 + b^2 - 2a \cdot b &= (a-b)^2, \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} a+b &= \sqrt{c^2 + \frac{c^2}{2}} = c\sqrt{\frac{3}{2}}, \\ a-b &= \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{2}} = c\sqrt{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

i hem acabat.

Nota. Observem que, d'entrada, el problema rau a tallar una hipèrbola equilàtera $a \cdot b = \frac{c^2}{2}$ i una circumferència $a^2 + b^2 = c^2$, on c és conegut, però una anàlisi més detallada ens mostra que és un problema resoluble amb regle i compàs.



8. (OI 1961) Siguin a, b, c els costats d'un triangle i T la seva àrea. Demostreu que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4T\sqrt{3}$. En quin cas val la igualtat?

Primera solució

Si designem per p el perímetre del triangle, tindrem que $p = a + b + c$.

És conegut que, d'entre tots els triangles de perímetre donat, el triangle equilàter és el que té la màxima àrea. I aquesta àrea val

$$\left(\frac{p}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Per tant, $T \leq \left(\frac{p}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ara, com que

$$\begin{aligned} p^2 &= (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac, \end{aligned}$$

resulta que $p^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$. D'on: $p^2 \leq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, amb igualtat si, i només si, $a = b = c$.

De tot això se'n segueix que

$$T \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \frac{\sqrt{3}}{4}$$

i hem acabat.

Segona solució

Sigui h una de les alçades que cauen dins del triangle i suposem que és l'alçada que correspon al costat a. Designem per m, n les dues parts en que h divideix a. Tenim que $b^2 = h^2 + m^2, c^2 = h^2 + n^2$ i

$$T = \frac{1}{2}(m+n)h.$$

Amb aquesta nomenclatura la desigualtat que volem provar és

$$2h^2 + m^2 + n^2 + (m+n)^2 \geq 2\sqrt{3}(m+n)h$$

que és equivalent la l'expressió quadràtica en h:

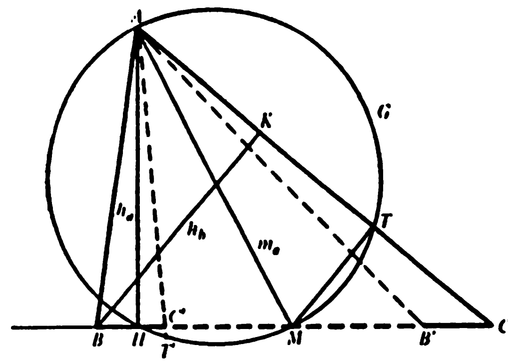
$$Q(h) = h^2 - \sqrt{3}(m+n)h + n^2 + m^2 + mn \geq 0. \tag{1}$$

Si completem quadrats resulta que $Q(h) = \left[h - \frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(m-n)\right]^2$. Aleshores $Q(h) \geq 0$, per a tot h, per tant la desigualtat (1) val per a tot h. $Q(h) = 0$ si, i només si, $m = n$ i $h = \sqrt{3}m$. En aquest cas el triangle és equilàter i, per tant, $a^2 + b^2 + c^2 = 4T\sqrt{3}$.

9. (OI 1960) Construïu un triangle ABC donades h_a, h_b (les alçades d'A i de B) i m_a, la mediana del vèrtex A.

Solució

Considerem la figura adjunta, en la qual hem dibuixat el cercle G de diàmetre $AM = m_a$. Resulta que AHM, amb $AH = h_a$, és un triangle rectangle i M és el punt mig de BC. A més MT és perpendicular a AC i, per tant a $BK = h_b$ i val exactament la meitat; és a dir, $MT = \frac{h_b}{2}$. Com podem determinar el punt T?



Fem el cercle de diàmetre $AM = m_a$. Dibuixem el triangle rectangle AHM, amb $AM = m_a$ i $AH = h_a$.

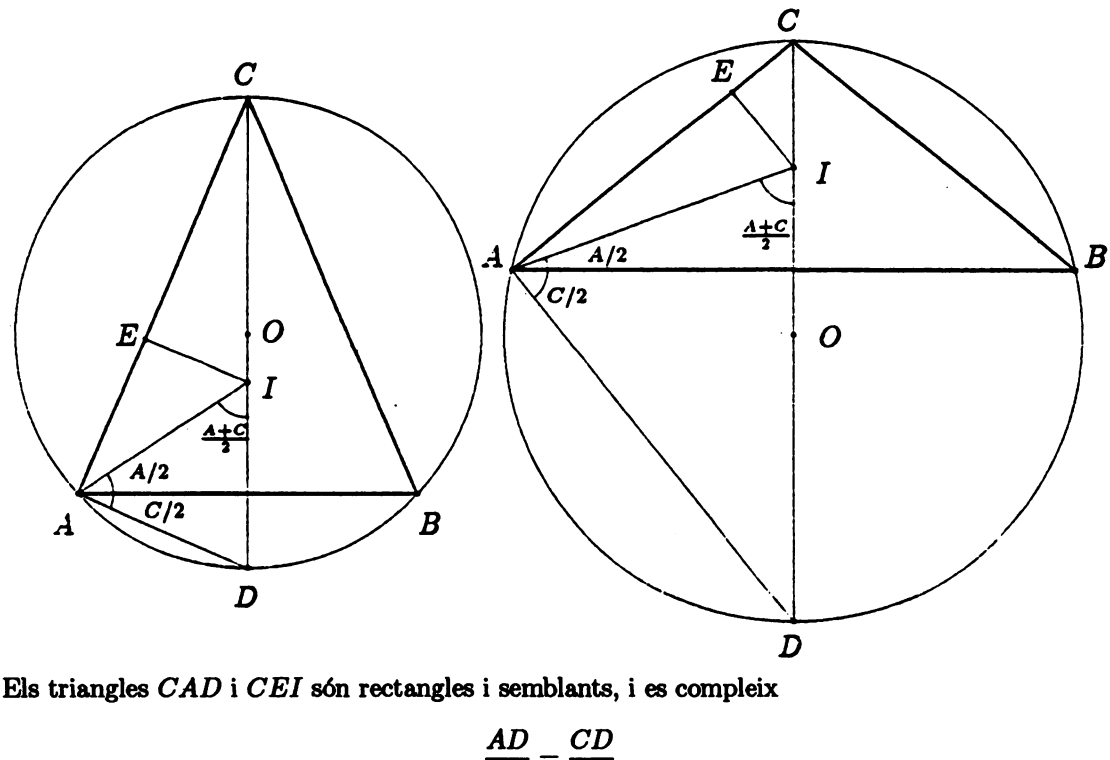
Ara, amb centre en M i radi $MT = \frac{h_b}{2}$ fem un arc de circumferència fins que tallem la circumferència G en el punt T. Unint A amb T i perllongant convenientment AT i HM determinarem el punt C i el problema estarà resolt.

Nota. El mètode que consisteix a suposar el problema resolt, i de la situació que ens proporciona el problema resolt, deduir-ne algunes característiques del probelma que ens permetin de resoldre'l efectivament, fou usat a bastament pels matemàtics grecs i va rebre, en l'obra de PAPPOS, el nom d'*anàlisi*. La *síntesi* era la resolució del problema, a partir de les dades donades; és a dir, el problema oposat a l'anàlisi. A aquest problema hem procedit primer per anàlisi i després hem realitzat la síntesi.

10. (OI 1962) Considereu un triangle isòscels. Sigui r el radi de la circumferència circumscrita i ρ el radi de la circumferència inscrita. Demostreu que la distància d entre els centres d'aquestes dues circumferències és

$$\sqrt{r(r-2\rho)}.$$

Primera solució



Els triangles CAD i CEI són rectangles i semblants, i es compleix

$$\frac{AD}{EI}=\frac{CD}{CI}.$$

El triangle ADI és isòscels i en resulta $AD = DI = r - d$ i $CI = r + d$. La proporció anterior queda aleshores en la forma

$$\frac{r-d}{\rho}=\frac{2r}{r+d}.$$

I fent operacions tenim que $r^2 - d^2 = 2r\rho$ i $d^2 = r^2 - 2r\rho = r(r-2\rho)$.

En cas que el triangle sigui obtusangle, surt tot igual llevat que $AD = DI = r + d$ i $CI = r - d$.

Segona solució

D'una banda

$$\sin\frac{C}{2} = \frac{IE}{IC} = \frac{\rho}{IC},$$
$$\sin\frac{C}{2} = \frac{AD}{2r} = \frac{ID}{2r},$$

ja que el triangle DBM és isòscels i de l'altra, $IC \cdot ID = r^2 - d^2 = (r+d)(r-d)$..

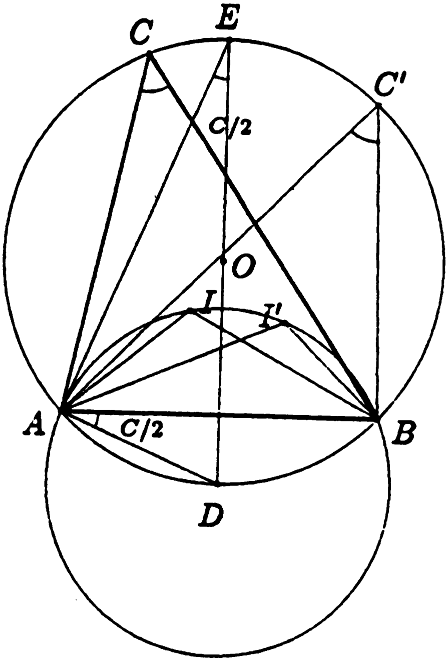
* * *

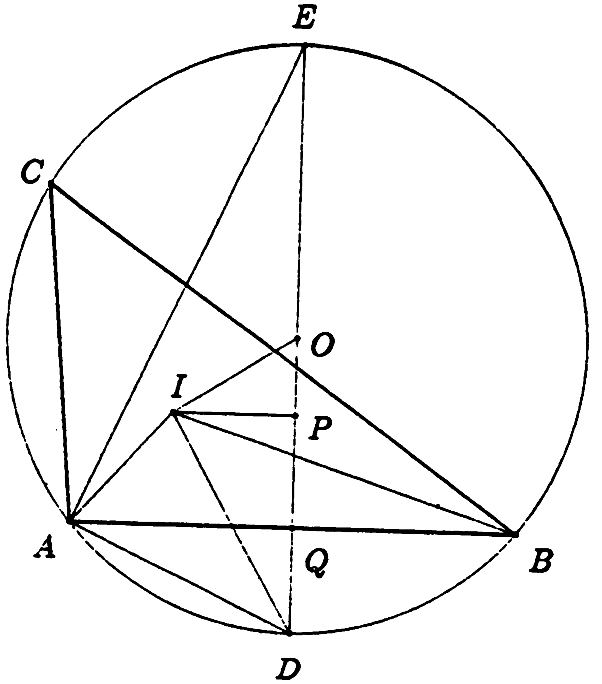
Tot seguit ens vam plantejar si aquesta relació era vàlida en general —de fet és un teorema que fou establert per EULER— i com podíem fer-ho per tal de demostrar-lo.

En primer lloc podem observar que a la segona resolució el fet que el triangle sigui isòscels, malgrat el que pugui semblar, no juga cap paper. Els únics fets que juguen un paper són la *invariància* de la potència d'un punt a una circumferència i el fet que l'incentre —el centre de la circumferència inscrita— sigui el punt on es tallen les bisectrius. Considerem la potència del punt I respcete de la circumferència circumscrita usant dues rectes: la recta CID que passa pels punts —*alineats*— C, I i D, on D és el punt mig de l'arc que correspon a la corda AB en la circumferència crcumscrita i IO la recta que uneix els dos centres, el circumcentre i l'incentre. Considerem d'altra banda el triangle AOD de la figura següent. És *isòscels* —aquest fet és clau— i, per tant, com que $AD = ID$, podem refer la segona demostració.

Una altra manera de veure-ho és la següent:

Observem en primer lloc que si fixem els dos vèrtexs A i B d'un triangle i fem moure el vèrtex C, mantenint fixa la circumferència circumscrita, l'incentre descriu l'arc capaç del segment AB vist sota l'angle $\pi/2 + C/2$. Aquest arc té centre al punt D intersecció de la mediatriu d'AB amb la circumferència circumscrita. (*Fgura de l'esquerra.*)





Sigui $s = AD$ ($= DI$ per la consideració anterior, *figura de la dreta*), $m = DQ$ i $n = IP$. El triangle EAD és rectangle i pel teorema del catet $s^2 = 2rm$. El triangle OPI també és rectangle i pel teorema de Pitàgoras $d^2 = (r - \rho - m)^2 + n^2$. Aplicant novament el teorema de Pitàgoras al triangle IPD surt $n^2 = s^2 - (\rho + m)^2$, i substituint a la igualtat anterior, tenint present la igualtat $s^2 = 2rm$, dóna $d^2 = (r - \rho - m)^2 + s^2 - (\rho + m)^2 = r^2 - 2r\rho = r(r - 2\rho)$.

Problemes de teoria de nombres

11. (OI 1969) Demostreu que, per a tot $n > 1$, $n^4 + 4$ és sempre un nombre compost.

Solució

$$n^4 + 4 = n^4 - 4n^2 + 4 - 4n^2 = \left(n^2 - 2\right)^2 - 4n^2 = \left(n^2 - 2 + 2n\right)\left(n^2 - 2 - 2n\right).$$

12. (OI 1959) Demostreu que, per a tot nombre natural n, la fracció $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ és irreductible.

Solució

Si d és un divisor de $21n + 4$ i de $14n + 3$, llavors d divideix també

$$2(21n + 4) = 42n + 8 \quad \text{i} \quad 3(14n + 3) = 42n + 9.$$

Per tant divideix la diferència que és 1.

13. (OI 1964) (a) Trobeu tots els enters positius m pels quals $2^n - 1$ és divisible per 7.

(b) Demostreu que no existeix cap enter positiu n pel qual $2^n + 1$ és divisible per 7.

Solució

(a) A $\mathbb{Z}_7$ es compleix que $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4$ i $2^3 = 1$ de forma que l'ordre de 2 a $\mathbb{Z}_7$ és 3. Per tant $2^n - 1$ és divisible per 7 si, i només si, n és múltiple de 3.

(b) De la mateixa manera, $2^n + 1$ serà divisible per 7 si, i només si, $2^n = -1 = 6$ a $\mathbb{Z}_7$ la qual cosa és impossible.

14. (OI 1972) Siguin m i n enters no negatius qualssevol. Demostreu que

$$\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!} \quad \text{és un enter.} \qquad (0! = 1).$$

Primera solució

En primer lloc recodem que s'anomena *valoració $p-$àdica* d'un enter $a \neq 0$, i s'indica $v_p(a)$, l'exponent amb el que el primer p figura a la descomposició d'a en factors primers.

De la mateixa definició en resulta fàcilment que $v_p(a) \geq 0$, que $v_p(1) = 0$, i que, si a, b són enters no nuls, $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$. Si $\dfrac{m}{n}$ és un nombre racional no nul, es defineix $v_p\left(\dfrac{m}{n}\right) = v_p(m) - v_p(n)$.

El nombre racional $\dfrac{m}{n}$ serà enter ssi, per a tot nombre primer p, $v_p(m) \geq v_p(n)$.

Per tant resoldre la qüestió plantejada és equivalent a demostrar que

$$(1) \qquad \begin{cases} v_p\left((2m)!\,(2n)!\right) - v_p\left(m!\,n!\,(m+n)!\right) = \\ = v_p\left((2m)!\right) + v_p\left((2n)!\right) - v_p\left(m!\right) - v_p\left(n!\right) - v_p\left((m+n)!\right) \geq 0, \end{cases}$$

per a tot nombre primer p.

És sabut que $v_p(m!) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{m}{p^i}\right]$, on $\left[\dfrac{m}{p^i}\right]$ representa la part entera del nombre racional $\dfrac{m}{p^i}$, És clar que aquesta suma és finita ja que, si $p^r \leq m < p^{r+1}$, $\left[\dfrac{m}{p^i}\right] = 0$ per a $i \geq r+1$. Per demsotrar-ho primer es comprova que és cert per a $m = 0$, i després es pot procedir o bé per inducció sobre m o bé simplement comptant quantes vegades apareix el factor p a $m!$ amb exponent igual almenys a 1, quantes amb exponent igual almenys a 2, quantes amb exponent almenys igual a 3, etc.

Tenint això en compte, provar (1) és equivalent a provar que, per a tot primer p,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2m}{p^i}\right] + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{p^i}\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^i}\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m+n}{p^i}\right] \geq 0.$$

Com que totes les sumes són finites aquesta condició es pot escriure en la forma

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2m}{p^i}\right] + \left[\frac{2n}{p^i}\right] - \left[\frac{m}{p^i}\right] - \left[\frac{n}{p^i}\right] - \left[\frac{m+n}{p^i}\right]\right) \geq 0$$

per tant basta provar que

$$\left[\frac{2m}{p^i}\right]+\left[\frac{2n}{p^i}\right]-\left[\frac{m}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{m+n}{p^i}\right]\geq 0$$

per a tot primer p i tot $i \geq 1$.

Si posem

$$\frac{m}{p^i}=\left[\frac{m}{p^i}\right]+\alpha,\quad 0\leq\alpha<1,\qquad\qquad \frac{n}{p^i}=\left[\frac{n}{p^i}\right]+\beta,\quad 0\leq\beta<1,$$

es té

$$\left[\frac{2m}{p^i}\right]=2\left[\frac{m}{p^i}\right]+[2\alpha],\quad \left[\frac{2n}{p^i}\right]=2\left[\frac{n}{p^i}\right]+[2\beta],\quad \left[\frac{m+n}{p^i}\right]=\left[\frac{m}{p^i}\right]+\left[\frac{m}{p^i}\right]+[\alpha+\beta].$$

Per tant,

$$\left[\frac{2m}{p^i}\right]+\left[\frac{2n}{p^i}\right]-\left[\frac{m}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{m+n}{p^i}\right]=[2\alpha]+[2\beta]-[\alpha+\beta]$$

que pot ser 0 o 1 segons els valors d'α i β.

Exemple

$$\frac{14!\,30!}{7!\,15!\,22!}=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 23\cdot 29=3\,121\,560.$$

Anàlisi del problema

Comentari: Aquest problema es podria classificar com un problema d'ofici matemàtic: és prou difícil com perquè no surti en una primera aproximació "naïf" però, si se n'ha vist algun altre de semblant, és força rutinari. En tot cas, és prou instructiu.

Solució: En un primer intent es pot abordar el problema per inducció, per exemple sobre n, tot mantenint m fix. Però el cas $n = 0$ ja ens presenta problemes. Si anomenem $f(m,n)$ a l'expressió en qüestió, el cas $f(m,0)$ és

$$f(m,0)=\frac{(2m)!}{m!\,m!}$$

que sabem que és un sencer perquè $\frac{(2m)!}{m!\,m!}=\binom{2m}{m}=C_{2m}^{m}$ són les combinacions de $2m$ elements agafats d'm en m. Arribats a aquest punt ens podem plantejar ja una pregunta rellevant: com es demostra que $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$ és un nombre sencer sense fer servir el fet que aquest número representa el nombre de combinacions d'm elements agafats d'n en n?

De moment deixem la pregunta a l'aire i seguim els nostres intents de demostrar el resultat inicial per inducció sobre n. Ja sabem que $f(m,0)$ és un sencer. Ara suposem que $f(m,n)$ també ho és i intentem de demostrar que $f(m,n+1)$ també ho és:

$$\begin{aligned} f(m,n+1) &= \frac{(2m)!(2n+2)!}{m!(n+1)!(m+n+1)!} &= \frac{(2m)!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{m!(n+1)n!(m+n+1)(m+n)!} = \\ &= \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}\cdot\frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(m+n+1)} &= f(m,n)\cdot\frac{2(2n+1)}{m+n+1}. \end{aligned}$$

Per desgràcia el fet que $f(m,n)$ sigui sencer no ens ajuda pas gaire a l'hora de demostrar que $f(m,n+1)\in\mathbb{N}$. Si haguessim aconseguit trobar una relació similar però sumant en comptes de multiplcant, llavors hi hauria més possibilitats d'èxit.

Ens veiem obligats a abandonar aquesta via que, malgrat el fracàs, ens ha deixat dos fets importants que cal retenir:

1. $\dfrac{(2m)!}{m!\,m!} = \begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix} = C_{2m}^{m}$, i per tant $\dfrac{(2m)!}{m!\,m!}$ és un sencer perquè respon a un problema combinatori.
2. La pregunta: com es demostra que $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ és un enter sense fer servir el fet que aquest número representa el nombre de combinacions d'm elements agafats d'n en n?

El fet 1) ens condueix a reformular el nostre problema en el sentit indicat: podem trobar un problema combinatori la resolució del qual sigui precisament l'expressió $f(m,n)$?

Unes quantes manipulacionms porten l'expressió original d'$f(m,n)$ a una forma potser més engrescadora en aquesta línia:

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!\,n!(m+n)!} = \frac{(2m)!(2n)!m!\,n!}{m!\,m!\,n!n!\,(m+n)!} = \begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}\frac{m!\,n!}{(m+n)!} = \frac{\begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} m+n \\ m \end{pmatrix}}.$$

Queda com a problema obert el trobar un enunciat en termes combinatoris, la solució del qual doni exactament aquesta expressió.

2) La resposta es pot trobar a qualsevol llibre d'anàlisi algebraica o de teoria de nombres elemental[1]:

Lema. *El nombre de vegades que un primer p divideix exactament $m!$ és igual a:*

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{p^k}\right]+\cdots,$$

on $[x]$ representa la part entera d'x.

[1] Veure per exemple *Introducción a la teoría elemental de números*. Niven y Zuckerman, Ed. Limusa, 88–89 o bé *La teoría de los números*. J. Cilleruelo y A. Córdoba. Ed. Biblioteca Mondadori, Madrid, 1992, 2–4.

La sèrie anterior de fet és finta ja que quan $p^k > m$, $\left[\frac{m}{p^k}\right] = 0$.

Amb aquest resultat és fàcil veure que tot primer que aparegui a la descomposició en factors primers d'$n!$ o d'$(m-n)!$ (suposant $n < m$) apareix a la descomposició en factors primers d'$m!$ i amb exponent més petit o igual i que, si un primer p apareix alhora a la descomposició d'$n!$ i d'$(m-n)!$,

$$\left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{m-n}{p^k}\right] \leq \left[\frac{m}{p^k}\right].$$

En conseqüència, $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ és un enter.

Això ens dóna la clau per trobar una demostració del nostre problema: estudiem la descomposició en factors primers del numerador i del denominador de l'expressió i intentem de demostrar que tots els factors primers del denominador apareixen a la descomposició del numerador amb exponent més petit o igual:

Si p és un factor primer del denominador, és un factor primer del numerador. En efecte, si p és un factor primer del denominador, p apareix a la descomposició d'$n!$ o d'$m!$ o d'$(m+n)!$. Lavors $p \leq \text{màx}\,(n, m, m+n)$ i per tant $p \leq \text{màx}\,(2n, 2m, m+n)$. D'ací en deduïm que p no pot ser alhora $> 2m$ i $> 2n$ [ja que, si $p \leq (m+n)$, aleshores $2p \leq 2(m+n)$].

Ara, si p^a és la contribució del factor primer p al denominador i p^b és la del numerador, anem a veure que $a \leq b$:

$$\begin{aligned} a &= \sum_j \left[\frac{m}{p^j}\right] + \sum_j \left[\frac{n}{p^j}\right] + \sum_j \left[\frac{m+n}{p^j}\right] &= \sum_j \left(\left[\frac{m}{p^j}\right] + \left[\frac{n}{p^j}\right] + \left[\frac{m+n}{p^j}\right]\right) \\ b &= \sum_j \left[\frac{2m}{p^j}\right] + \sum_j \left[\frac{2n}{p^j}\right] &= \sum_j \left(\left[\frac{2m}{p^j}\right] + \left[\frac{2n}{p^j}\right]\right) \end{aligned}$$

per un j fix. Ara podem demostrar que

$$\left[\frac{m}{p^j}\right] + \left[\frac{n}{p^j}\right] + \left[\frac{m+n}{p^j}\right] \leq \left[\frac{2m}{p^j}\right] + \left[\frac{2n}{p^j}\right],$$

resultat que es pot veure en general —si $x, y \geq 0$, $[x] + [y] + [x+y] \leq [2x] + [2y]$—, i que havíem trobat ja a la primera resposta al problema.

Si fem $x = [x] + r, y = [y] + s$, llavors $x + y = [x] + [y] + r + s$, que ens diu que $[x + y] = [x] + [y] + [r+s]$; per una altra banda, $2x = [2x] + 2r$ i $2y = [2y] + 2s$. Per tant $[2x] = 2[x] + [2r], [2y] = 2[y] + [2s]$. Cal, doncs, comparar les dues expressions següents:

$$\begin{aligned} [x] + [y] + [x+y] &= [x] + [y] + [x] + [y] + [r+s] \\ [2x] + [2y] &= 2[x] + 2[y] + [2r] + [2s]. \end{aligned}$$

N'hi ha prou, doncs, a establir que $[r+s] \leq [r] + [s]$, amb $0 \leq r, s \leq 1$, relació immediata si analitzem els casos possibles: $1 < r + s < 2, r + s \leq 1$.

Segona solució

Considerem la taula triangular dels valors $a_n^m = f(m,n)$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 2 & & 2 & & & & \\
 & & & 6 & & 2 & & 6 & & & \\
 & & 20 & & 4 & & 4 & & 20 & & \\
 & 70 & & 10 & & 6 & & 10 & & 70 & \\
252 & & 28 & & 12 & & 12 & & 28 & & 252 \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots &
\end{array}$$

Ara, a ull, hem de veure si és possible de trobar un lligam entre un cert a_{mn} i d'altres $a_{k\ell}$, amb $k < m$ o $\ell < n$.

S'observa força fàcilment que cada element és igual a quatre vegades el que té a la fila de sobre a l'esquerra menys el que té a l'esquerra. Per exemple:

$$10 = 4 \cdot 20 - 70; \quad 6 = 4 \cdot 4 - 6; \quad 10 = 4 \cdot 4 - 6; \quad 70 = 4 \cdot 20 - 10;$$

$$28 = 4 \cdot 70 - 252; \quad 12 = 4 \cdot 10 - 28; \quad 12 = 4 \cdot 6 - 12; \quad 28 = 4 \cdot 10 - 12; \quad 252 = 4 \cdot 70 - 28.$$

Ara podríem deduir perfectament la setena fila: primerament calculem

$$a_0^6 = f(6,0) = \frac{12!\,0!}{6!\,0!\,6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6!} = 924.$$

Aleshores

$$a_1^5 = 4 \cdot a_0^5 - a_0^6 = 4 \cdot 252 - 924 = 84, \text{etc.}$$

Si la nostra conjectura és certa la setena filera calculada a mà i calculada amb l'expressió anterior coincidirà.

Ara, per tal de completar el problema, cal provar que

$$a_n^m = f(m,n) = 4 \cdot f(m, n-1) - f(m+1, n).$$

Provem-ho per inducció sobre n:

- Quan $n = 0, a_0^m = \begin{pmatrix} 2\mathrm{m} \\ \mathrm{m} \end{pmatrix} = \dfrac{2m!}{m!\,m!} \in \mathbb{N}$.
- Suposem-ho cert par a $n-1$ i per a tot m. Aleshores és evident que $f(m,n) \in \mathbb{N}$.

Nota. Aquest mètode, inductiu, és d'una gran utilitat per tal de poder "ensumar" relacions numèriques, però en canvi l'hem desterrat gairebé del tot de les tècniques d'ensenyament i d'aprenentatge.

15. (OI 1975) Quan $4\,444^{4\,444}$ s'escriu amb notació decimal, la suma dels seus dígits és A. Sigui B la suma dels dígits d'A. Trobeu la suma dels dígits de B. (A i B s'escriuen en notació decimal.)

Solució

Sigui $N = 4\,444^{4\,444}$ i C la suma de B. Es verifica

$$N \equiv A \equiv B \equiv C \pmod 9.$$

Pel teorema petit de Fermat[2], com que $\varphi(9) = 6$ i m.c.d$(4\,444, 9) = 1$ es té que

$$4\,444^6 \equiv 1 \pmod 9.$$

D'altra banda, $4\,444 = 740 \cdot 6 + 4$ i per tant $4\,444^{4\,444} = 4\,444^{6\cdot 740+4} \equiv 4\,444^4 \pmod 9$. Però $4\,444 = 493 \cdot 9 + 7$ i per tant $4\,444^4 \equiv 7^4 \equiv 7 \pmod 9$. Es té doncs

$$N \equiv A \equiv B \equiv C \equiv 7 \pmod 9.$$

Com que

$$\log 4\,444^{4\,444} = 4\,444 \cdot \log 4\,444 = 16\,210.7077\ldots$$

el nombre de xifres d'N és 16 211 i, com que $A \equiv 7 \pmod 9$, $A \leq 16\,210 \cdot 9 + 7 = 145\,897$. Per tant el nombre de xifres d'A és com a màxim 6 i $B \leq 5 \cdot 9 + 7 = 52$. El nombre de xifres de B és doncs com a màxim 2 i la primera d'elles és ≤ 5. D'on en resulta que $C \leq 14$ i, com que $C \equiv 7 \pmod 9$, $C = 7$.

Plantejament didàctic del problema

1. Demostrar que la suma A dels dígits d'un nombre N (escrit en notació decimal) i el nombre N donen el mateix romanent al dividir-los per 9.
2. Demostrar que, si el m.c.d.$(N, 9) = 1$, el romanent de dividir N^6 per 9 és 1.
3. Demostrar que $N = 4\,444^{4\,444}$ dóna com a romanent 7 al dividir-lo per 9.
4. Tenint en compte el significat de la característica del logaritme decimal d'un nombre, calcular el nombre de xifres d'$N = 4\,444^{4\,444}$.
5. Si B és la suma dels dígits d'A, quan val la suma dels dígits de B quan $N = 4\,444^{4\,444}$?

Nota. Es pot utilitzar aquest problema per introduir el concepte de equivalència i fins i tot per arribar al *teorema petit de Fermat*.

[2] Recordem que el *teorema petit de Fermat* diu que, si m.c.d$(a, m) = 1$, aleshores $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$, a on $\varphi(x)$ és la *funció d'Euler*, que ens dóna el nombre de números sencers $1 \leq k < m$, primers amb m.

Problemes lúdics/variats

16. Sumeu tots els nombres de la forma $\dfrac{1}{a_1\, a_2 \cdots a_k}$, a on $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ recorre totes les parts no buides del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Primera solució

A l'hora de dissenyar una estratègia per resoldre un problema com el de l'enunciat en el qual, efectivament trobem una forma de resoldre el sumatori proposat, la forma de la solució dependrà d'n, és convenient d'elaborar una petita taula pels primers valors d'n, per tal de veure si els resultats fets a ma ens suggereixen una fórmula tancada pel sumatori.

Per a $n = 1$, tenim $S(1) = 1$.

Per a $n = 2$, tenim $S(2) = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1 \cdot 2} = 2$.

Per a $n = 3$, tenim $S(3) = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Veiem que, reordenant-la, l'expressió anterior és igual a:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2}\right) + \frac{1}{3} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}.$$

Per a $n = 4$, seguint el mateix procés de reagrupació tindríem:

$$S(4) = S(3) + \frac{1}{4} \cdot S(3) + \frac{1}{4} = 3 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}.$$

La mateixa tasca d'elaborar aquesta petita taula porta en el seu si el **mètode** per resoldre efectivament el problema per inducció sobre n. La taula ens suggereix que $S(n) = n$, però al mateix temps ens proporciona la forma de demostrar aquest resultat. Al cap i a la fi el procediment anterior no fa altra cosa que validar un fet dintre del quefer matemàtic: quan se sap on volem arribar és més fàcil de cercar el camí que condueix a l'objectiu.

Volem demostrar que $S(n) = n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Demostració per inducció. Per a $n = 1$ la fórmula és trivialment certa.

Suposem-la certa per a $n = k-1$, és a dir, suposem que $S(k-1) = k-1$. Llavors tenim que $S(k)$ està formada per totes les sumes que contenia $S(k-1)$, més aquelles altres que resultarien d'afegir en el denominador el factor k a les anteriors més la fracció $\dfrac{1}{k}$. Així doncs:

$$S(k) = S(k-1) + \frac{1}{k} \cdot S(k-1) + \frac{1}{k} = k - 1 + \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k}.$$

Segona solució

Tanmateix, per aquest problema hi ha una forma de resolució més sintètica que permet d'arribar a la fórmula que hem demostrat de forma directa. Si considerem el polinomi normalitzat que té com a úniques arrels les fraccions unitàries

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n},$$

llavors els coeficients k-èsims d'aquest polinomi estaran formats per les sumes de tots els productes possibles d'$(n-k)$ arrels del polinomi i, per tant, $S(n)$ no serà altra cosa que la suma de tots els coeficients del polinomi anterior, la qual cosa s'obté calculant el valor numèric del polinomi per a $x = 1$.

Resumint, si aquest polinomi l'anomenem $P_n(x)$, resulta que

$$P_n(x) = (x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(x+\frac{1}{n}\right).$$

Llavors

$$S(n) = P_n(1) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n-1} = n.$$

17. Demostreu que és impossible de recobrir un tauler d'escacs amb 31 fitxes de dominó col·locant-les de manera que una fitxa cobreixi exactament dues caselles, després d'haver suprimit les dues caselles que es troben a l'extrem d'una mateixa diagonal.

Solució

És un problema ben senzill. Cada fitxa cobreix una casella blanca i una casella negra. Cal doncs que hi hagi la mateixa quantitat de caselles blanques que de caselles negres. Però, si suprimim les dues caselles de l'extrem d'una diagonal, suprimim dues caselles del mateix color i trenquem la coincidència en el nombre de caselles.

18. Demostreu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ no és sencer per a cap valor d'n.

Primera solució

Si 2^i és la màxima potència de 2 que apareix entre $1, 2, \ldots, n$, definim l'enter

$$q = 2^{i-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots,$$

on $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots$ és el producte de tots els imparells menors o iguals a n.

Considerem el producte

$$q\,S = q\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^i} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = a_1 + a_2 + \cdots + \frac{q}{2^i} + \cdots + a_n,$$

on a_j és un enter ja que q és múltiple de tots els denominadors excepte 2^i. Si S fos enter $q\,S$ també ho seria i q hauria de ser múltiple de 2^i, la qual cosa és absurda per construcció.

Segona solució

Només cal sumar

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i+1} \cdots + \frac{1}{2^i+k},$$

amb $k < 2^i$. Aleshores el màxim común denominador dels denominadors és de la forma $2^i p_{i_1}^{k_1} \cdots p_{i_r}^{k_r}$, on cada p_{i_m} és un primer senar. Aleshores el denominador és de la forma $2^i \cdot M$, M senar, i el numerador és de la forma $2 \cdot N + 1$, ja que tots els numeradors són parells llevat el que correspon a $\frac{1}{2^i}$ que és precisament M.

19. (OI 1972) Demostreu que donat un conjunt de 10 números diferents de dues xifres (en el sistema decimal) sempre és possible de seleccionar dos subconjunts diferents els membres dels quals tinguin la mateixa suma.

Solució

El nombre de subconjunts propis que es poden formar és

$$\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}=$$

$$=2^{10}-2=1\,022.$$

Les possibles sumes dels elements d'aquests conjunts prenen valors entre 10 i $(91+92+\cdots+99)=855$ i per tant forçosament hi ha d'haver més d'un conjunt amb la mateixa suma.

Problemes plantejats en el decurs de les sessions

20. Demostreu que, si a, b i $\dfrac{a^2+b^2}{a\,b+1} = m$ són enters positius, llavors m és un quadrat.

Solució

Si $a = 1, b = 1$, aleshores $m = 1$ i per tant m és un quadrat.

Si $m > 1$, posant $\dfrac{a^2+b^2}{a\,b+1} = m$ en la forma $a^2 + b^2 - m\,a\,b - m = 0$, s'observa que l'enunciat diu que $P(a,b)$ és un punt de coordenades enteres i positives de la cònica $x^2 + y^2 - m\,x\,y = 0$ on m és un enter positiu.

Si $m = 2$, aleshores $x^2 + y^2 - 2\,x\,y - 2 = 0$ o sigui que $(x-y)^2 - 2 = 0$; és a dir, la cònica descompon en el producte de les dues rectes paral·leles $x - y - \sqrt{2} = 0$ i $x - y + \sqrt{2} = 0$ i per tant no té cap punt de coordenades enteres.

Si $m > 2$, la cònica és una hipèrbola simètrica respecte de la recta $x = y$ i que no talla a aquesta recta. Sigui $A_1(x_1, y_1)$ un punt d'aquesta hipèrbola amb x_1, y_1 enters positius i podem suposar sense resctricció que $x_1 > y_1$. Observem que, si una de les coordenades a d'un punt de la hipèrbola és un enter positiu i l'altra coordenada b també és entera, ha de ser necessàriament positiva o nul·la perquè sinó seria $a^2 + b^2 - m\,a\,b > m$ i això és absurd.

Si substituïm y_1 a l'equació de la cònica, tindrem l'equació de segon grau en x

$$x^2 - m\,x\,y_1 + y_1^2 - m = 0$$

una arrel de la qual és x_1 i l'altre és $x_2 = \dfrac{y_1 - m}{x_1} = m\,y_1 - x_1$. La primera expressió d'x_2 ens diu que és més petit que y_1 i la segona que és un enter i per tant positiu o nul perquè satisfà l'equació

$$y_1^2 + x_2^2 - m\,y_1\,x_2 - m = 0,$$

és a dir és un punt de la hipèrbola.

Si $x_2 = 0$, resulta que $m = y^2$ i hem acabat la demostració. Si $x_2 > 0$, repetim el procés amb el punt $A_2(y_1, x_2)$ i obtindrem un punt $A_3(x_2, y_2)$ amb $y_2 > x_2$ enter positiu o nul tal que $y_2 = \dfrac{x_2^2 - m}{y_1}$ i $x_1 > y_1 > x_2 > y_2$. Com que aquesta successió és una successió de nombres positius decreixents, el procés no podrà continuar indefinidament arribant necessàriament a una coordenada 0. Si y_n és el darrer terme no nul d'aquesta successió, $m = y_n^2$, com volíem demostrar.

21. Donat qualsevol α real, $\alpha > 1$, construïu una successió $\{a_i\}$ acotada $[\forall i \in \mathbb{N}\,(|a_i| < C)]$, tal que els seus termes verifiquin:

$$\forall i, j \in \mathbb{N}\,(|a_i - a_j| \cdot |i-j|^\alpha \geq 1)\,.$$

L'anterior enunciat correspon a un dels 8 problemes que van ser formulats a les proves finals de l'Olimpíada Internacional de Matemàtiques de fa dos anys i que fou publicat pel *Butlletí de la Secció de Matemàtiques*, **7** (1992) de l'I.E.C.

L'existència de l'exponent α suggereix, sibilinament, que aquest requisit ha de ser imprescindible per a la resolució del problema —més endavant veurem que no és pas així—, i a l'hora aquest mateix exponent fa nosa en el moment d'assajar una via de solució.

Anem a exposar a continuació la solució "oficial" al problema que fou presentada al fòrum per l'estudiant Ignasi Mundet, el qual l'havia tret de la revista *Normat*, 1992. A continuació exposarem dues solucions més, endurint però les hipòtesis de partida, prenent com a valor d'α l'1.

Primera solució [Solució oficial]

Es basa amb una utilització adequada de la convergència de la sèrie armònica quan l'exponent dels naturals ès més gran que 1 $\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} < \infty, \text{quan } \alpha > 1\right]$. L'enfocament de la solució fa imprescindible aquest punt de sortida.

La construcció de la successió rau en un procediment recorrent:

$$x_0 = 0, \qquad x_{i+1} = \text{ínfim}\,\{z > 0 : (\forall k \leq i)\,(|z - x_k| \cdot |i+1-k|^\alpha \geq 1)\}\,.$$

Els termes de la successió satisfan la condició de l'enunciat per la pròpia construcció. Veiem ara que tots els termes de la successió estan fitats pel valor $2\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} = D$. En efecte, sigui a_k un terme qualsevol de la successió. Com que s'ha de verificar

$$(\forall i < k)\left(|a_k - a_i| \geq \frac{1}{|k-i|^\alpha}\right),$$

si prenem les boles de centre x_i i radi $\dfrac{1}{(k-i)^\alpha}$, la suma de les longituds de tots aquests segments és inferior a D, i per tant la ubicació d'a_k com a ínfim del complementari d'aquestes boles obertes serà sempre $a_k < D$.

És evident que el procediment anterior obliga al fet que el valor d'α sigui superior a 1, per tal de poder garantir l'afitament dels termes de la successió. Així, per exemple, si $\alpha = 2$, llavors es pot assegurar que els termes de la successió estan tots ells dins de l'interval $\left[0, \frac{\pi^2}{3}\right)$, però a mesura que α s'apropa a 1, la fita de la successió anirà creixent a valors cada cop més grans.

Segona solució

Anem a veure a continuació una alternativa de solució que eviti la hipòtesi d'$\alpha > 1$ i que els termes de la successió compleixin $|a_i - a_j| \cdot |i - j| \geq 1$.

Basant-nos en l'estructura decimal dels nombres reals, encabirem tots el termes de la successió a l'interval $[0, 10)$ de la manera següent:

Els primers 10 termes de la successió seran $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Els següents 10 termes seran $0.1, 1.1, \ldots, 9.1$. Ara vindrien els mateixos nombres però canviant l'1 de la xifra de les dècimes per un 2, i així fins arribar a $0.9, 1.9, \ldots, 9.9$. A continuació el mateix però fent augmentar d'una a una les xifres de les centèsimes: $0.01, \ldots, 9.01, \ldots$

De fet, i deixant de banda l'esquema geomètric en el qual s'inspira la construcció dels nombres de la successió, és molt fàcil d'esbrinar quin és el decimal que es troba en un lloc qualsevol de la successió. N'hi ha prou amb agafar el nombre amb base decimal que dóna el lloc, capgirar-lo i posar la coma un lloc a la dreta de la primera xifra (que eventualment pot ser zero). Per exemple, $a_{1\,357} = 7.531; a_{12\,500} = .0521$. Formalment, si l'expressió decimal del lloc N és igual a $N = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot 10^i$, aleshores $a_N = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot 10^{-i}$.

La successió així construïda està trivialment fitada per 10 i, a més, no és gens difícil de veure que verifica la desigualtat de l'enunciat. Si prenem dos termes ben propers de la successió, per exemple, 3.145 i 3.146, la seva diferència és d'una mil·lèsima, però la diferència dels llocs a on es troben és: $6\,413 - 5\,413 = 1\,000$, amb la qual cosa el producte de les dues diferències és 1.

Nota. Aquest procediment el podem aplicar a una base inferior a 10, per exemple 3, i així reduir el confinament de la successió al segment $[0, 3)$. Tanmateix, no podem pas fer el mateix per a la base binària, doncs aleshores el segment $[0, 2)$ no és prou llarg com per poder separar adequadament els termes de la successió, quan realitzem el retorn cap endarrera. Els intents per modificar lleugerament la successió que es construiria en la base binària, tot i fent una mica més gran el confinament, han estat infructusos.

Tercera solució

Una tercera alternativa basada en un mètode diferent per construir la successió condueix a una fita lleugerament inferior a 3, però no pas gaire més petita. Concretament la fita passaria a ser $\sqrt{2} + \frac{3}{2}$.

La següent solució té la seva justificació en el conegut *teorema de Liouville* sobre l'aproximació d'un nombre algèbric per racionals, que l'any 1 848 li permeté de construir el primer nombre amb base decimal que era amb seguretat transcendent. L'enunciat d'aquest teorema diu:

Donat un nombre algèbric α de grau n, existeix una constant M_α, que només depèn d'α, tal que per a tot racional $\frac{p}{q}$ satisfa la desigualtat

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{M_\alpha}{q^n}.$$

Si considerem el nombre algèbric $\sqrt{2}$, tindrem que es compleixen les següents desigualtats per a una constant M: $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{M}{q^2}$ o multiplicant-ho tot per q^2: $q\,|q\sqrt{2} - p| > M$ o $\frac{1}{M} q\,|q\sqrt{2} - p| > 1$. Si ara considerem la successió

$$A_n = \frac{1}{M}\left(n\sqrt{2} - \left[n\sqrt{2}\right]\right),$$

on $[x]$ vol dir *part entera d'x*, llavors la diferència entre dos termes d'aquesta successió donarà una expressió del mateix tipus, i es satisfaran les condicions de l'enunciat del problema: tots els termes de la successió es troben dins del segment $\left[0, \frac{1}{M}\right)$. Anem ara a detreminar el valor d'$\frac{1}{M}$.

Considerem la successió $a_n = \operatorname{Frac}\left(n\sqrt{2}\right)$ i la successió complementària $b_n = 1 - a_n$. Llavors la diferència entre dos termes qualssevol de la successió a_i dóna lloc a un valor que pertany a una de les dues successions. En efecte, sigui

$$a_i = \operatorname{Frac}\left(i\sqrt{2}\right) = i\sqrt{2} - p_i; \qquad a_j = \operatorname{Frac}\left(j\sqrt{2}\right) = j\sqrt{2} - p_j.$$

Llavors, si $i > j$,

$$|a_i - a_j| = \left|(i-j)\sqrt{2} - (p_i - p_j)\right| < 1,$$

que en el cas que correspongui a $a_i > a_j$ correspondrà a un valor de la successió a_i, i en el cas contrari correspondrà a un valor de la successió b_i.

Anem ara a demostrar que tots els termes d'ambdues successions satisfan les següents desigualtats:

$$n \cdot a_n \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad n \cdot b_n \geq \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{3}{2}}.$$

Sabem que $a_n = n\sqrt{2} - p_n$, i com que $\left(n\sqrt{2} - p_n\right)\left(n\sqrt{2} + p_n\right) = 2n^2 - p_n^2 \geq 1$, tenim: $n\sqrt{2} - p_n \geq \frac{1}{n\sqrt{2} + p_n}$ i multiplicant per n: $n\left(n\sqrt{2} - p_n\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{p_n}{n}}$, però $\frac{p_n}{n}$ són les diferents aproximacions inferiors d'$\sqrt{2}$. $\left[n\sqrt{2} - p_n > 0 \text{ implica } \sqrt{2} > \frac{p_n}{n}\right]$. I per tant una fita superior del denominador és $2\sqrt{2}$ i s'obté la desigualtat $n\,a_n \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ara demostrem l'altra desigualtat:

Tenim que b_n és de la forma $q_n - n\sqrt{2}$, on $q_n = p_n + 1$. De fet, q_n és el primer enter superior a $n\sqrt{2}$, mentre que p_n n'és el primer enter inferior. Com abans tenim que

$$\left(q_n - n\sqrt{2}\right)\left(q_n + n\sqrt{2}\right) = q_n^2 - 2n^2 \geq 1,$$

d'on $n\left(q_n - n\sqrt{2}\right) \geq \dfrac{1}{\sqrt{2} + \frac{q_n}{n}}$. Però ara $q_n - 2\sqrt{2} > 0$ implica $\sqrt{2} < \frac{q_n}{n}$. És a dir, les diefernts aproximacions a $\sqrt{2}$ que representen les fraccions $\frac{q_n}{n}$ són totes elles superiors a rel quadrada de 2. La taula de les primeres aproximacions seria $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \cdots$ Totes aquestes aproximacions racionals tendeixen a rel quadrada de dos, quan n creix indefinidament.

Per a totes les fraccions $\frac{q_n}{n}$ tals que el seus numerador i denominador no verifiquen l'*equació de Pell* $q_n^2 - 2n^2 = 1$ no hi ha cap mena de problema a l'hora de demostrar la desigualtat, ja que podem escriure $n\left(q_n - n\sqrt{2}\right) \geq \dfrac{2}{\sqrt{2} + \frac{q_n}{n}}$ i, com que 2 és una fita superior de totes aquestes fraccions, tenim que $n\left(q_n - n\sqrt{2}\right) \geq \dfrac{2}{\sqrt{2}+2} > \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} > \dfrac{1}{\sqrt{2}+\frac{3}{2}}$.

Els valors més petits de $q_n + \sqrt{2}$ s'obtindran dels valors $\langle q_n, n\rangle$ que satisfan l'equació de Pell. Però aquestes solucions $\left[\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \cdots\right]$ formen una successió decreixent que tendeix a $\sqrt{2}$ i, per tant, $\frac{3}{2}$ és una fita superior de totes elles i d'aquesta manera podem concloure que sempre es complirà

$$n\left(q_n - n\sqrt{2}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}+\frac{3}{2}}.$$

D'aquesta forma es podrà constatar simultàniament per ambdues successions a_n, b_n la següent desigualtat:

$$n\,a_n\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right) > 1, n\,b_n\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right) \geq 1,$$

la qual cosa garanteix que la successió formada de la següent manera:

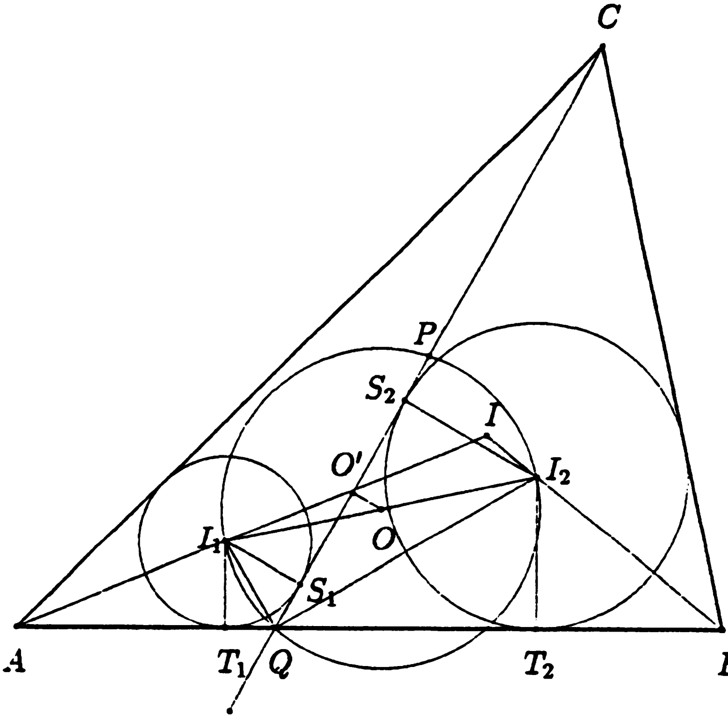
$$A_n = \left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot \mathrm{Frac}\left(n\sqrt{2}\right),$$

satisfà l'enunciat del problema, i tots els seus termes es troben dins en el segment $\left[0, \sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)$.

Nota. La solució presentada mitjançant aquest mètode és fàcilment generalitzable a d'altres irracionals quadràtics, però el valor de la fita augmentaria. Resta per veure si és possible trobar una altra successió de confinament inferior i si és possible de demostrar l'existència d'una fita mínima per tal que el problema tingui solució. Els intents que hem fet per resoldre aquesta darrera qüestió han sigut infructuosos. Tanmateix el problema sembla prou interessant...

22. Donat un triangle ABC, un punt Q sobre AB i la recta que passa per Q i C, s'ha de demostrar que la circumferència que té per diàmetre els incentres I_1 i I_2 dels triangles ABC i BQC, talla el segment QC en el punt Q i un altre P el qual dista $p - c$ de C, amb independència de la posició de Q.

Solució



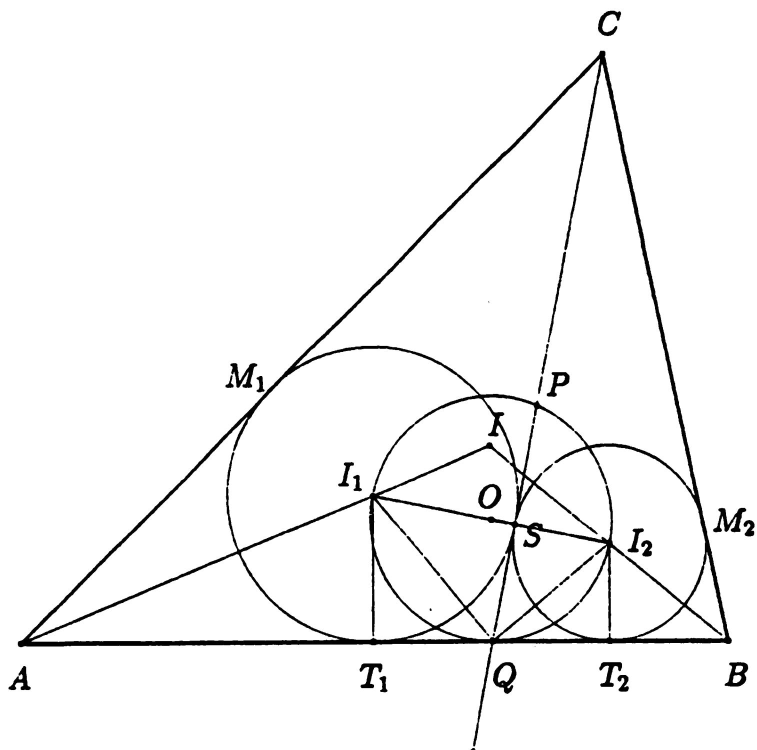
Siguin p_1, p_2 i p_3 els semiperímetres dels triangles ABC, AQC i BQC respectivament. Es comprova fàcilment que $p_1 + p_2 = p + d$, on d és la distància de C a Q. Es compleix que

$$QT_1 = QS_1 = p_1 - b \qquad \text{i} \qquad QT_2 = QS_2 = p_2 - a.$$

Com que O és el punt mitjà d'I_1I_2, per projecció paral·lela, O' és el punt mitjà d'S_1S_2 i $QS_1 = QO' - O'S_1 = PO' - O'S_2 = PS_2$ i, per tant, $QP = QS_2 + S_2P = QS_2 + QS_1 = QT_2 + QT_1 = T_1T_2$. Però $T_1T_2 = p_1 - b + p_2 - a = p_1 + p_2 - (b + a) = p + d - (2p - c) = d - (p - c)$, d'on $PC = p - c$. La distància de P a C és independent de la posició de la recta QC i descriu un arc de circumferència de centre C que passa pels punts de tangència en els costats a i b de la circumferència inscrita al triangle ABC.

23. Donat un triangle ABC, trobeu un punt Q del costat AB tal que les circumferències als triangles AQC i BQC siguin tangents.

Solució

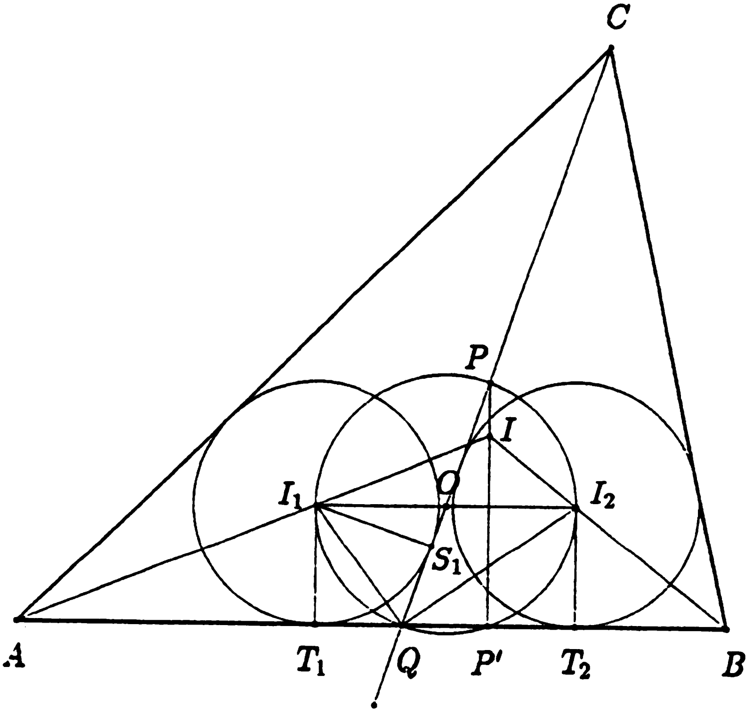


Posem $z = QT_1 = QS = QT_2; y = AT_1 = AM_1; t = BT_2 = BM_2; x = CM_1 = CS = CM_2$. Si p és el semiperímetre del triangle ABC és té que $2p = 2y + 2z + 2t + 2x$ i es dedueix que $p = y + z + t + x = y + z + a$.

Resulta que $AQ = y + z = p - a$, d'on es dedueix que Q és el peu de la perpendicular traçada des d'I a AB.

24. Donat un triangle ABC, trobeu un punt Q del costat AB tal que les circumferències inscrites als triangles AQC i BQC tinguin el mateix radi.

Solució



Sigui r el radi de les circumferències inscrites als triangles AQC i BQC, r' el de la circumferència de diàmetre I_1I_2, centres respectius de les circumferències anteriors, p, p_1 i p_2 els semiperímetres d'ABC i BQC, d la distància de Q a C.

De la semblança dels triangles I_1T_1Q i I_2T_2Q en resulta $\dfrac{r}{T_1Q} = \dfrac{QT_2}{r}$ i $r^2 = T_1Q \cdot QT_2 = (p_1 - b)(p_2 - a)$. De la semblança dels triangles I_1S_1O i QPP' en surt $\dfrac{r}{r'} = \dfrac{PP'}{2r'}$ i $PP' = 2r$. Aplicant el teorema de Pitàgoras al triangle $QP'P$ surt

$(QP')^2 = (2r')^2 - (2r)^2 = ((p_1 - b) + (p_2 - a))^2 - 4(p_1 - b)(p_2 - a) =$
$= ((p_1 - b)^2 + 2(p_1 - b)(p_2 - a) + (p_2 - a)^2) - 4(p_1 - b)(p_2 - a) = ((p_1 - b) - (p_2 - a))^2.$

Com que $p_2 - a > p_1 - b$ resulta que $QP' = |p_1 - p_2 - b + a| = p_2 - a - p_1 + b$, i resulkta que $AP' = AQ + QP' = (2p_1 - b - d) + (p_2 - a - p_1 + b) = p_1 + p_2 - d - a = p - a$; per tant P' és el peu de la perpendicular traçada des d'I a AB.

Per tal d'obtenir Q es traça l'arc de centre C que passa pels peus de les perpendiculars traçades des d'I als costats a i b. Seguidament es traça la recta perpendicualr a c que passa per I; aquesta recta i el cercle anterior es tallen a P. La recta CP és la recta buscada.

Problemes històrics

25. Sigui C un punt del segment AB i amb diàmetres CB, CA i AB fem tres semicercles en el semiplà superior. Considereu la perpendicular a la recta AB per C i el punt D en el qual talla a la semicircumferència de diàmtere AB. Proveu que la superfície limitada per les tres semicircumferències és igual a la superfície del cercle de diàmetre DC. [Del *Llibre dels Lemes*.]

Solució

És absolutament elemental ja que DC és mitja proporcional entre els dos segments que determina sobre AB. D'altra banda $AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2 \cdot CA \cdot BC$ i fet.

26. Sigui AB el diàmetre d'un semicercle ACB i fem $AD = BE$. Fem ara tres semicercles sobre AD, EB i DE, els dos dels extrems en el semiplà d'ACB i l'altre en el semiplà oposat. L'àrea limitada pels semicercles de diàmetres AD, DE, EB i ACB és igual a la superfície del cercle de diàmetre CF, on CF és el segment que uneix els centres de les circumferències de diàmetres AB i DE. [Del *Llibre dels Lemes*.]

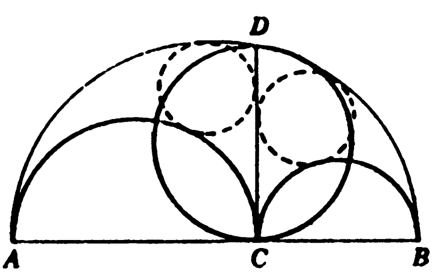
Solució

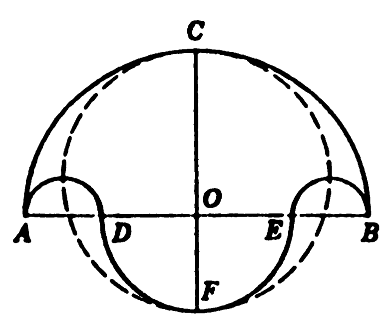
És absolutament elemental ja que

$$AB^2 - 2AD^2 + [AB - 2\,AD]^2 = 2\,[AB^2 + AD^2 - 2\,AB\,AD] = 2\,[AB - AD]^2.$$

Però

$$GF^2 = [AO + CO]^2 = [AO + (AO - AD)]^2 = [AB - AD]^2.$$





27. Sigui $ABCA$ una circumferència i considereu dues cordes $AB, BC[BC > AB]$. Sigui M el punt mig de l'arc ABC i F el peu de la perpendicular que va d'M a BC. Proveu que M és el punt mig de la corda trencada. [El *problema de la corda trencada.*]

Deduïu-ne alguns resultats de trigonometria.

Solució

Cal fer $BE = BA$ i unir E amb M. Els triangles MAB i MBE són iguals, ja que

$$\begin{aligned} \widehat{MAB} &= \pi - \frac{\text{arc}(AM)}{2}; \\ \widehat{MBC} &= \frac{\text{arc}(MC)}{2} = \frac{\text{arc}(AM)}{2}, \quad \text{per hipòtesi.} \end{aligned}$$

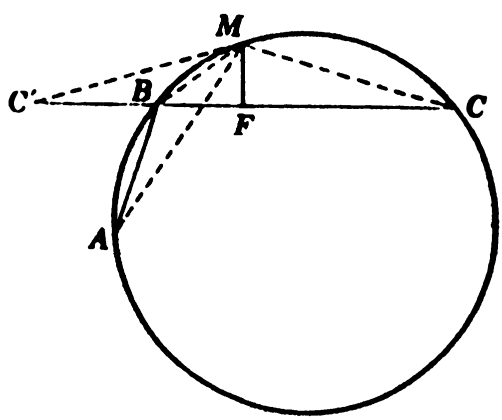
Només cal fer

$$MC = 2\sin\alpha, \quad MB = 2\sin\beta, \quad BC = 2\sin(\alpha+\beta).$$

Aleshores

$$FC = MC \cdot \cos\beta, \qquad BF = BM \cdot \cos\alpha$$

i s'obté la fórmula del sinus de la suma d'α i β.
Anàlogament, donat que $AB = 2\sin(\alpha-\beta)$, és possible d'aconseguir la fórmula de la diferència.



28. Els bous i les vaques d'HELIOS es troben pasturant a la illa de SICÍLIA. N'hi ha de quatre colors: blancs (B, b), negres (N, n), clapejats (C, c) i marrons (M, m). Sabem que les quantitats de bous i vaques satisfan les condicions següents:

1. els bous blancs són tants com els bous marrons i cinc sisenes parts dels negres;
2. els bous negres són tants com els bous marrons i nou vintenes parts dels clapejats;
3. els bous clapejats són tants com els bous marrons i tretze quarantadosenes parts dels blancs;
4. les vaques blanques són tantes com les set dotzenes parts dels bous i vaques negres junts;
5. les vaques negres són tantes com les nou vintenes parts dels bous i vaques amb clapes junts;
6. les vaques clapejades són tantes com les onze trentenes parts dels bous i vaques marrons junts;
7. les vaques marrons són tantes com les tretze quarantadusenes parts dels bous i vaques blancs junts.

A més, els bous blancs i negres junts sumen un nombre quadrat i els bous clapejats i els marrons un nombre triangular.
Quants bous i vaques hi ha de cada classe?

Solució

Les tres primeres equacions menen al sistema indeterminat de primer grau

$$B = \frac{5}{6}N + M, \quad N = \frac{9}{20}C + M, \quad C = \frac{13}{42}B + M,$$

la solució del qual la podem posar en la forma

$$M = 891\alpha, \quad B = 2\,226\alpha, \quad N = 1\,602\alpha, \quad C = 1\,580\alpha.$$

Les quatre equacions següents ens porten al sistema

$$b = \frac{7}{12}[N+n], \quad n = \frac{9}{20}[C+c], \quad c = \frac{11}{30}[M+m], \quad m = \frac{13}{42}[B+b],$$

que té com a solució

$$m = \frac{5\,439\,213}{4\,657}\alpha.$$

Si fem $\alpha = 4\,567\beta$, s'obté finalment

$$\begin{array}{lclcl}
B &=& 10\,366\,428\beta &=& 2\cdot 3\cdot 7\cdot 53\cdot 4\,657\beta\\
N &=& 7\,460\,514\beta &=& 2\cdot 3^2\cdot 89\cdot 4\,657\beta\\
M &=& 4\,069\,197\beta &=& 3^4\cdot 11\cdot 4\,657\beta\\
C &=& 7\,358\,060\beta &=& 2^2\cdot 5\cdot 79\cdot 4\,657\beta\\
b &=& 7\,206\,360\beta &=& 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 23\cdot 23\,373\beta\\
n &=& 4\,893\,246\beta &=& 2\cdot 3^2\cdot 17\cdot 15\,991\beta\\
m &=& 5\,439\,213\beta &=& 3^2\cdot 13\cdot 46\,489\beta\\
c &=& 3\,515\,820\beta &=& 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\,761\beta.
\end{array}$$

Ara cal que

$$B+N=x^2=17\,826\,942=2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 4\,657\beta.$$

Una possible solució és

$$\beta=3\cdot 11\cdot 29\cdot 4\,657\gamma^2=4\,456\,749\gamma^2.$$

Aleshores

$$\begin{array}{lcl}
B &=& 2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 53\cdot 4\,657^2\gamma^2\\
N &=& 2\cdot 3^3\cdot 11\cdot 29\cdot 89\cdot 4\,657^2\gamma^2\\
M &=& 3^5\cdot 11^2\cdot 29\cdot 4\,657^2\gamma^2\\
C &=& 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 29\cdot 79\cdot 4\,657^2\gamma^2
\end{array}$$

D'ací en resulta que

$$M+C=3\cdot 11\cdot 29\cdot 4\,657^2\gamma^2\cdot[3^4\cdot 11+4\cdot 5\cdot 79]=3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353\cdot 4\,657^2\gamma^2=\frac{y(y+1)}{2}.$$

És a dir,

$$\begin{array}{rcl}
4\,(y+1)\,y &=& 2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353\cdot 4\,657^2\gamma^2\\
4y^2+4y+1 &=& 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353(2\cdot 4\,657\,\gamma)^2+1\\
(2y+1)^2-A\,\epsilon^2 &=& 1.
\end{array}$$

Finalment s'obté l'equació de Pell

$$\delta^2-4\,729\,494\,\epsilon^2=1.$$

Segons A. H. BELL, després de treballar-hi 4 anys, la mínima solució dóna un valor de γ amb 206 531 dígits i la seva forma és

$$34555906354559370506303802963617*****252058980100,$$

aconseguint de calcular els 32 primers dígits i els 12 darrers. Aquesta solució fora confirmada pel treball d'H.C. WILLIAMS, R.A. GERMAN i C. R. ZARNKE el quals l'any 1965 aconseguiren, usant una computadora, la solució completa.

29. Proveu, fent servir un paper quadriculat, que

(a) $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1$;

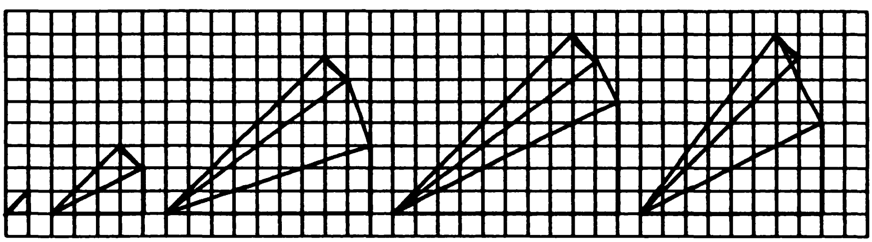
(b) $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1} \dfrac{1}{2} + \tan^{-1} \dfrac{1}{3}$;

(c) $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1} \dfrac{1}{3} + \tan^{-1} \dfrac{1}{3} + \tan^{-1} \dfrac{1}{7}$;

(d) $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1} \dfrac{1}{2} + \tan^{-1} \dfrac{1}{5} + \tan^{-1} \dfrac{1}{8}$;

(e) $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1} \dfrac{1}{2} + \tan^{-1} \dfrac{1}{2} - \tan^{-1} \dfrac{1}{7}$.

Solució



30. Proveu, calculant, que

(a) $\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ [MACHIN 1 706];

(b) $\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{70} + \tan^{-1}\dfrac{1}{99}$ [EULER 1 764];

(c) $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{8}$ [DASHE 1 844];

(d) $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ [HUTTON 1 776];

(e) $\dfrac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\dfrac{1}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$ [HUTTON 1 776, EULER 1 779];

(f) $\dfrac{\pi}{4} = 3\tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{1}{20} + \tan^{-1}\dfrac{1}{1\,988}$ [STÖRMER 1 896];

(g) $\dfrac{\pi}{64} = \dfrac{3}{4}\tan^{-1}\dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{1}{57} - \dfrac{5}{16}\tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ [GAUSS];

(h) $\dfrac{\pi}{64} = \dfrac{3}{8}\tan^{-1}\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}\tan^{-1}\dfrac{1}{57} - \dfrac{1}{16}\tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ [STÖRMER];

(i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{n} = \tan^{-1}\dfrac{1}{n+m} + \tan^{-1}\dfrac{m}{n^2+mn+1}$.

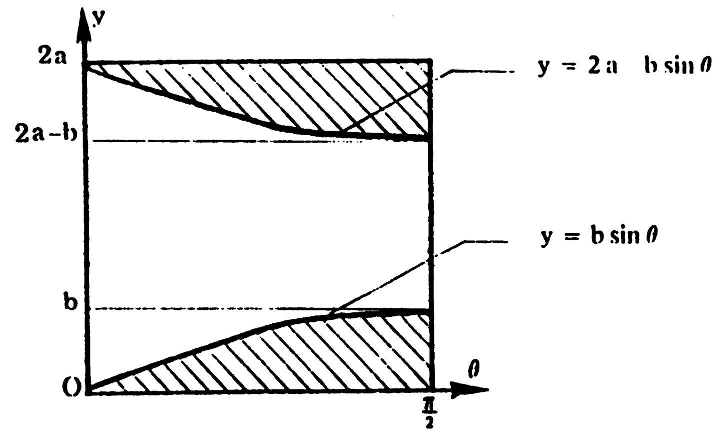
Solució

És un exercici de càlcul. Per exemple en el cas (a) si fem $\beta = \tan^{-1}\frac{1}{5}$, aleshores $\tan\beta = \frac{1}{5}$ i aleshores $\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \dfrac{5}{12}$ i $\tan 4\beta = \dfrac{2\tan 2\beta}{1-\tan^2 2\beta} = \dfrac{120}{119}$, que difereix solament d'$\frac{1}{119}$ d'1 i l'arctangent d'1 és $\frac{\pi}{4}$. És a dir, $\tan\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan 4\beta - 1}{1+\tan 4\beta} = \dfrac{1}{239}$ i hem acabat la demostració.

31. LLancem una agulla de longitud L a l'atzar en una superfície plana i horitzontal en la qual s'hi ha dibuixat una col·lecció de paral·leles separades entre si una distància fix $d(\geq L)$. Quina és la probabilitat que l'agulla trepitgi una d'aquestes paral·leles? [És el *problema de l'agulla de Buffon.*]

Solució

Fem $d = 2a$ i $L = 2b$ i sigui I el punt mig de l'agulla de coordenades $\langle\theta, y\rangle$, amb $0 \geq y \geq 2a, 0 \geq \theta \geq \frac{\pi}{2}$. Per què talli una de les paral·leles cal que $y + b\sin\theta \geq 2a$ o que $y - b\sin\theta \leq 0$. Ara representem gràficament el rectangle $[0, \pi/2] \times [0, 2a]$. El centre de l'agulla pot caure en qualsevol d'aquests punts. Ara cal esbrinar els punts $P = (\theta, y)$ favorables al problema que ens ocupa. D'acord amb la figura resulta que



Per tant,

$$P = \frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin\theta\, d\theta}{\pi a} = \frac{2b}{\pi a}.$$

En el cas particular que $b = a$, resulta que $P = \dfrac{2}{\pi}$.

Nota. És possible d'usar aquesta probabilitat per tal de calcular el valor de π. Així LAZZERINI l'any 1 901 fent 3 408 llençament va aconseguir un valor de π amb sis decimals exactes. En aquella època s'havien calculat ja 527 xifres decimals exactes de π.

32. Proveu que $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum_1^\infty \dfrac{1}{n^2}$. [Aquest teorema fou establert per EULER l'any 1 736 i reproduït a la *Introductio in Analysin infinitorum* (1 748).].

Solució

La demostració d'EULER es basa en una propietat dels polinomis. Considerem el polinomi

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + 1 = 0.$$

Sabem que

$$\begin{aligned} a_1 \cdots a_{n-1} + a_2 \cdots a_{n-2} a_n + \cdots + a_2 \cdots a_n &= \pm \frac{a_1}{a_n} \\ a_1 \cdots a_n &= \mp \frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

D'ací que $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = -a_1$. Ara ho aplica amb tota naturalitat a les sèries de potències. Considera la sèrie

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^\infty a_k X^k,$$

la qual s'anul·la en els punts $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Aleshores $1 - \dfrac{y}{3!} + \dfrac{y^2}{5!} + \cdots$ s'anul·la en $y = \pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots$. Ara aplicant el teorema anterior, vàlid per a polinomis, obté

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n\pi)^2} = \frac{1}{3!},$$

que acaba la demostració.

Nota. Cal remarcar que és possible donar una demostració *no-estàndard* correcta d'aquesta manera de fer incorrecta d'EULER, com podem veure a LUXEMBURG, *American Mathematical Montly*, **80**, 38–67 i també a.

Indiquem de passada que EULER per tal de calcular el logaritme de π calcula també

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdots$$

33. Quina és la probabilitat que, en agafar dos nombres naturals a l'atzar, siguin primers entre si.

Solució

Suposem que p és un nombre primer. Aleshores hi ha $\frac{1}{p}$ nombres que són divisibles per p. La probabilitat que p divideixi un nombre m, agafat a l'atzar, és doncs $\frac{1}{p}$. Per tant, la probabilitat que p divideixi alhora a m i a n és $\frac{1}{p^2}$ [suposant, és clar, la independència en l'elecció]. Així doncs la probabilitat que p no divideixi ni a m ni a n és $1-\frac{1}{p^2}$.

Ara volem que m i n siguin primers entre si i, per tant, cal que no hi hagi cap nombre primer que els divideixi alhora. La probabilitat que això passi és

$$P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)\cdots$$

Si observem que

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right) &= 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\\
\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right) &= 1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}\cdots\\
\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right) &= 1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}\cdots+\frac{1}{49^2}+\cdots,
\end{aligned}$$

tindrem que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\prod_{p\ \text{primer}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=1$ i això acaba la demostració.

Nota. Hom es planteja l'ambigüitat del terme "agafats a l'atzar" i posa de manifest que la correcció d'aquest terme passa per l'àlgebra dels observables considerant la *paradoxa de Bertrand*.

34. Els dos cercles tangents a la recta DC i a les semicircumferències de diàmetres AD i AC, DC i AC són iguals. [Del *Llibre dels Lemes*.]

Solució

Per tal de poder-ho demostrar cal establir prèviament un lema que diu:

> *Considerem dues circumferències de centre F i G tangents en un punt E. Suposem que llurs diàmetres CGD i AFB són paral·lels. Aleshores els punts E, D i B estan alineats.*

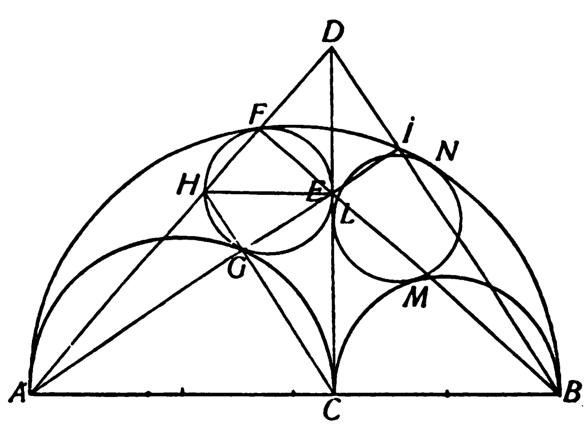
Acceptant la validesa d'aquest lema hem de demostrar que els diàmetres HE i LE' són iguals. De fet demostrarem que

$$AC \cdot BC = AB \cdot HE = AB \cdot LE', \text{ per analogia.}$$

1. Pel lema anterior $D, H, A; F, E, B; A, G, E; H, G, C$ estan alineats.
2. Perllonguem AGE fins a I.
3. Unim I amb B.
4. AHF i CED es tallen [postulat de les paral·leles] en D.
5. Unim D i I: D, I, B estan alineats.

Tenim tres alçades i dos costats; el tercer està completament determinat. [El text d'ARQUIMEDES no diu res més.]

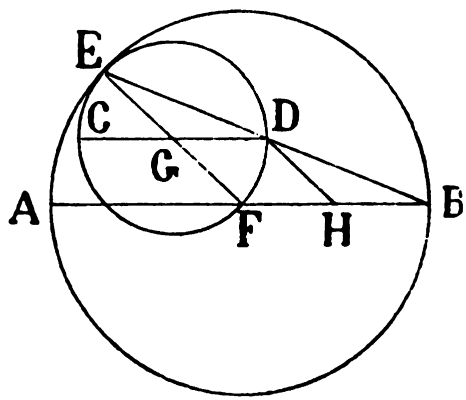
6. $GC \| IB$ i per tant $\dfrac{AD}{HD} = \dfrac{AC}{HE} = \dfrac{AB}{BC}$ i finalment $AB \cdot HE = AC \cdot BC$.

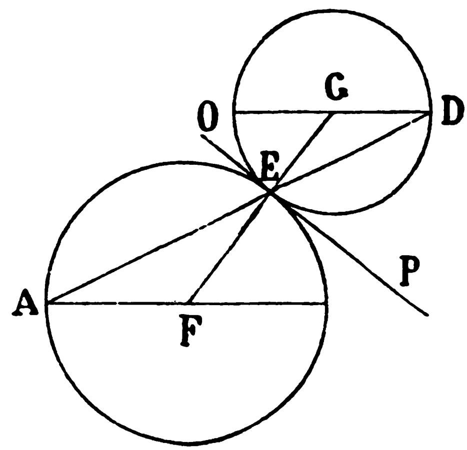


Ara cal demostrar el lema anterior:

1. E, G i F estan alienats, ja que ambdues circumferències tenen una tangent comuna en el punt E.
2. $DH \,||\, EF$.
3. $EG = GD = FH$ i $HB = FB - FH = EF - EG = GF = DN$.
4. Triangles isòscels amb angles en el vèrtex iguals. Angles a la base iguals
5. Fet.

1. E, G i F estan alienats, ja que ambdues circumferències tenen una tangent comuna en el punt E.
2. EGD i EFA isòscels. Angles en el vèrtex iguals.
3. Fet.





Problemes pel curs 1993–1994

1. Proveu que tots els angles del triangle ABC són aguts si, i només si, existeixen punts A', B', C' de l'interior dels costats BC, AC, i AB respectivament tals que els segments AA', BB', CC' tinguin la mateixa longitud.

2. Suposem que $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ és una permutació dels números $1, 2, \ldots, 100$. Proveu que la suma $1\, a_1 + 2\, a_2 + \cdots + 100\, a_{100}$ té un mínim en la permutació $100, 99, \ldots, 1$.

3. Sigui $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, amb n sencer, $n > 1$. Proveu que $f(x)$ no pot pas ser el producte de dos polinomis, ambdós amb tots el seus coeficients sencers i de grau ≥ 1.

4. Sigui $\cos a = b$ i $\cos b = a$. Proveu que $a = b$.

5. En un cercle de centre O i radi unitat considerem una corda AB. Damunt de la corda AB considerem una semicircumferència cap a fora. Sigui D el centre d'aquesta semicircumferència. Proveu que el punt C de la semicircumferència més llunyà del centre O de la circumferència inicial és el punt que es troba damunt del radi ODC perpendicular a la corda AB. Seguidament determineu AB per tal que OC sigui màxim.

6. Sigui $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ una successió no decreixent de sencers positius. Diem que V és *complet* si, i només si, cada sencer positiu n és la suma d'una subsuccessió de V; és a dir, si per a cada $n \in \mathbb{N}$,

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i, \qquad \text{on } a_i = 0 \text{ o } 1.$$

Proveu que

(a) V és completa si, i només si, $v_1 = 1$, i, per a tot $k = 2, 3, \ldots$, $s_{k-1} = v_1 + v_2 + \cdots + v_{k-1} \geq v_k - 1$.

(b) el conjunt F dels nombres de *Fibonacci* és complet;

(c) $F - f_r$ és complet;

(d) si $v_1 = 1$ i $v_{k+1} \leq 2v_k$, aleshores V és complet.

7. Considereu l'anell Γ de tots els nombres complexos $a + bi$, on a i b són nombres sencers. Sigui p un nombre primer. Proveu que les afirmacions següents són equivalents:

   a) $\Gamma/p\Gamma$ és un cos.

   b) la congruència $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ no té solucions senceres.

   c) $p \equiv 3 \pmod{p}$.

8. Demostreu que, per a qualsevol polígon convex d'àrea 1, existeix un paral·lelògram d'àrea 2 que el conté.

9. Proveu que el polinomi

$$x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \cdots - 2nx + 2n + 1$$

no té pas arrels reals.

10. Sigui P un punt d'un arc de circumferència que abraça una corda AB. Demostreu la propietat òbviament evident que estableix que la suma de les cordes AP i PB tenen un màxim quan P es troba en el punt mig de l'arc AB .

11. Resoldre l'equació $\sin 7x + \sin 8x = 1.99999$.

12. Si a, b, c, d són nombres reals positius tals que

$$\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor nc \rfloor + \lfloor nd \rfloor,$$

per a qualsevol nombre sencer n, proveu que

$$a + b = c + d.$$

Si a, b, c, d són nombres positius *irracionals* tals que

$$a + b = c + d,$$

proveu que, per a tot $n = 1, 2, 3, \ldots, \lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor nc \rfloor + \lfloor nd \rfloor$.

13. Per a tota parella de nombres reals x, y tenim la desigualtat

$$f(x) - f(y) \leq (x - y)^2.$$

Trobeu totes les funcions f.

14. Proveu que $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ no pot ser expressat com el producte de menys d'n primers (no necessàriament diferents).

15. Sigui ABC un triangle acutangle i D un punt del seu interior tal que

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

i

$$\angle ADB = \angle ACB + 90^{\circ}.$$

a) Calculeu el valor de la raó

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}.$$

b) Demostreu que les tangents en C a les circumferències circumscrites als triangles ACD i BCD són perpendiculars.

16. Damunt d'un tauler d'escacs infinit juguem de la forma següent: en començar hi ha n^2 fitxes col·locades sobre un quadrat d'$n \times n$ cel·les adjacents, amb una fitxa a cada una de les cel·les. Una jugada és un salt d'una fitxa en una direcció horitzontal o vertical per damunt d'una cel·la adjacent ocupada per una altra fitxa, fins a una no ocupada que sigui contigua amb ella. La fitxa per damunt de la qual hem saltat es retira del tauler. Trobeu els valors d'n per als quals el joc pot acabar quedant una sola fitxa damunt del tauler.

17. Si f designa la funció que dóna $\cos 17x$ en termes de $\cos x$, és a dir,

$$\cos 17x = f(\cos x),$$

proveu que aquesta mateixa funció f dóna $\sin 17x$ en termes de $\sin x$.

18. Proveu que

(a) $n\sigma(n) \equiv 2(\text{mòd } \varphi(n))$ es compleix per a tot nombre primer i únicament pels nombres compostos $4, 6$ i 22;

(b) la funció

$$f(x,y) = \frac{y-1}{2}\left[|B^2-1| - (B^2-1)\right] + 2,$$

on $B = x(y+1) - (y!+1)$, amb $x, y \in \mathbb{N}$, solament genera nombres primers, els genera tots i, si són senars, solament els genera una vegada;

(c) $n\sigma(n) + \frac{1}{2}\left[|B^2-1| - (b^2-1)\right] \equiv 2\ (\text{mòd } \varphi(n))$, on $B = (n-4)(n-6)(n-22)$ si, i només si, n és un nombre primer.

19. Sigui $\mathbb{N} = \{1,,2,3,\ldots\}$. Determineu si existeix una funció $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que compleixi les condicions següents:

1. $f(1) = 2$,
1. $f(f(n)) = f(n) + n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$,
3. $f(n) < f(n+1)$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

20. Siguin P, Q, R tres punts del pla. Definim $m(PQR)$ com el mínim de les longituds de les alçades del triangle PQR (cas que P, Q, R estiguin en línia recta, aleshores $m(PQR) = 0$). Siguin A, B, C punts del pla. Demostreu que, per a qualsevol punt X del pla,

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

21. Trobeu el valor mínim de la funció

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2+9} + \sqrt{(x-8)^2+16} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

22. Siguin A i B matrius quadrades de la mateixa mida sobre el cos dels complexos i sigui $C = AB - BA$. Sabem que $CA = AC$ i $CB = BC$. Expressa $(A+B)^3$ com una suma de monomis $A^iB^jC^k$.

23. Proveu que, si des d'els vèrtexs B i C d'un triangle rectangle ABC portem els catets damunt la hipotenusa BC, aleshores els catets se s'encavalquen en un segment la longitud del qual coincideix amb el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle.

24. Determineu cada una de les arrels reals de

$$x^4 - \left(2 \cdot 10^{10} + 1\right) x^2 - x + 10^{20} + 10^{10} - 1 = 0$$

correctes fins al quart decimal.

25. Sigui $a > 0$. Considereu la successió $x_n = n\,(\sqrt[n]{a} - 1)$.

 a) Proveu que la successió $\{x_n\}$ és monòtona i afitada.
 b) Feu $L(a) = \text{lím}_{n\to\infty} x_n$. Proveu que $L(ab) = L(a) + L(b)$, per a tota parella de nombres reals positius a i b.

26. Sobre el cos dels reals considereu el sistema d'equacions les incògnites del quals són numerades amb elements de l'anell $\mathbb{Z}_n$ dels romanents mòdul n:

$$x_{i-1} + 2x_i + x_{i+1} = 0, \qquad i \in \mathbb{Z}.$$

Descriu el conjunt de totes les solucions.

27. Sigui ABC un triangle equilàter i Γ la seva circumferència inscrita. Si D i E són punts dels costats AB i AC, respcetivament, tals que DE és tangent a Γ, demostreu que

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1.$$

28. Dos nombres sencers no negatius a i b són "quats" si l'expressió decimal d'$a+b$ consta solament de zeros i uns. Siguin A i B dos conjunts infinits de sencers no negatius, tals que B és el conjunt de tots els nombres que són "quats" de tots els que pertanyen a A, i A és el conjunt de tots els nombres que són "quats" dels que pertanyen a B. Proveu que en un d'ambdós conjunts A o B hi ha una infinitat de parelles de nombres x, y tals que $x - y = 1$.

29. Proveu que p és un nombre primer és equivalent a cada una de les proposicions següents:

(a) $\sigma(p) + \varphi(p) = p \cdot d(p)$, a on $\sigma(n)$ és la suma dels divisors positius d'n, $d(n)$ és el nombre de divisors positius d'n i $\varphi(n)$ és la *funció d'Euler* d'n és a dir, la funció que mideix el nombre de números naturals $m \leq n$ que són primers amb n];

(b) $n|((n_1)! + 1)$ [*Teorema de Wilson*];

(c) $n|\sum_{r=1}^{n-3} r(r!)$.

30. Quantes arrels de l'equació $z^6 + 6z + 10 = 0$ pertanyen a cada un dels quadrants del pla complex?

31. Un tetaràedre $ABCD$ és *isòscels* ssi els vèrtexs oposats són iguals dos a dos. És a dir, $AB = CD, AC = BD$, i $AD = BC$. És fàcil provar que les cares del tetràedre són triangles congruents [iguals] i, per tant, tenen la mateixa superfície i el mateix perímetre. Proveu que

   (a) si les cares d'un tetràedre tenen el mateix perímetres són iguals;

   (b) un tetràedre és isòscels si, i només si, la suma dels angles de les cares en cadaun dels vèrtexs és 180°;

   (c) les línies fetes als vèrtexs d'una cara d'un tetràedre des del punt de contacte de la cara amb l'esfera inscrita formen tres angles en el punt de contacte que són els mateixos tres angles en cada una de les cares.

   (d) si totes les cares d'un tetràedre tenen la mateixa superfície, són iguals;

   (e) un tetràedre és isòscels si, i només si, les seves esferes inscrita i circumscrita són concèntriques.

32. Sabem que hi ha exactament n^k k–ples diferents $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$, construïbles a partir del conjunt $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ si s'accepta la repetició. Per a cada una d'aquestes k–ples a notem el valor mínim a_i. Proveu que la suma de tots aquests valors mínims és precisament

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k.$$

33. Quins són el tres darrers dígits de $7^{9\,999}$?

34. Llancem un dau normal repetidament fins que el total dels valors superi n. Quin és el resultat més probable que podem aconseguir?

35. Si a, b, c formen un triangle, proveu que, per a tot valor d'$n = 2, 3, 4, \ldots$, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}$ també formen un triangle.

36. Resoleu

(a) $u+v=\frac{1}{u}+w=\frac{1}{v}+\frac{1}{w}$.

(b) $u+v+\frac{1}{uv}=\frac{1}{u}+w+\frac{u}{v}=\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+vw=uv+\frac{w}{u}+\frac{1}{vw}$.

37. El *criteri de Schur-Cohn*

(a) Proveu que els dos zeros w del polinomi real t^2+bt+c satisfan $|w|<1$ si, i només si, $|b|<1+c<2$.

(b) Proveu que tots els zeros w del polinomi real t^3+bt^2+ct+d satisfan $|w|<1$ si, i només si,

$$|bd-c|<1-d^2\,|b+d|<|1+c|.$$

38. El "tauler" damunt del qual juguen dues persones és un polinomi mònic

$$f(x)=x^{2n}+a_{2n-1}\,x^{2n-1}+\cdots+a_1\,x+1,$$

en el qual els $2n-1$ coeficients $a_{2n-1},a_{2n-2},\ldots,a_1$ són nombres reals no especificats. El grau és un sencer *parell*≥ 4. Els jugadors juguen començant pel jugador A, després juga B i així successivament, l'un darrera de l'altre. Cada un dels jugadors tria un dels coeficients indeterminats finsa que el polinomi queda completament determinat. A guanya si $f(x)=0$ no té cap arrel real, mentre que B guanya en cas contrari.
Determineu una estratègia de guany per al jugador B.

39. Proveu que cada un dels termes de la successió

$$49, 4\,489, 444\,889, 44\,448\,889, \ldots, \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n}9, \ldots$$

és un quadrat perfecte.

40. Proveu que $\pi(n)\geq\frac{\log n}{\log 4}$, on $\pi(n)$ és el nombre de primers que no sobrepassen el nombre natural n. És un teorema degut a WACALW SIERPIŃSKI.

41. Proveu que és impossible de trucar un parell de daus de manera que cada una de les sumes $2,3,\ldots,12$ tinguin la mateixa probabilitat. [Podeu suposar que els daus són distingibles.]

42. Tenim tres circumferències de centres O_1, O_2 i O_3 i radi r que es tallen en un punt P i es troben dins d'un triangle ABC. Suposem qua cada una de les circumferències toca un parell de costats del triangle ABC. Proveu que els incentre I i circumcentre O del triangle estan alineats amb P.

43. Determineu tots els parells $\langle p, q\rangle$ de nombres reals pels quals la desigualtat

$$\left|\sqrt{1-x^2} - px - q\right| \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

és cert per a cada x tal que $0 \leq x \leq 1$.

44. Si un nombre sencer k conté tots els dígits $0, 1, , 2, \ldots, 9$ i aquesta propietat persisteix en els seus múltiples $k, 2k, 3k, \ldots$, diem que k és un nombre *persistent*. No hi ha cap nombre que sigui persistent, però si que hi ha nombres que són *$n-$persistents*; és a dir, que $k, 2k, \ldots, nk$ continguin els deu dígits. El nombre 1 234 567 890 és $k-$persistent. Trobeu el valor de k. Quin és l'ordre de persistència del nombre 526 315 789 473 684 210?

Proveu que, per a cada n, hi ha almenys un nombre $n-$persistent.

45. (a) Proveu que l'*única* parella de sencers positius (a, b) per a la qual la suma coincideix amb el producte és $(2, 2)$.

(b) Proveu que només hi ha una parella de sencers positius diferents $(a, b), a < b$, tal que $a^b = b^a$ i trobeu-la.

46. Suposeu que x i y varien damunt de la semirecta real no negativa. si el valor de

$$x + y + \sqrt{2x^2 + 2xy + 3y^2}$$

és sempre 4, proveu que x^2y és sempre més petit que 4.

47. Suposem que un quadrat de paper $ABCD$ el dobleguem de manera que el vèrtex D es col·loqui en un punt D' del costat BC. El costat AD es situa aleshores en la posició $A'D'$ i talla el costat AB en el punt E. Proveu que $A'E$ és igual al radio de la circumferència inscrita en el triangle rectangle EBD'.

48. Si $F = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ és la suombres de Fibonacci, calculeu

(a) $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}}$.

(b) $\text{lím}_{n\to\infty} \dfrac{f_{n+r}}{f_n}$.

(c) $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2^n}}$.

49. Considereu l'equació

$$(*) \qquad \sqrt{2p+1-x^2} + \sqrt{3x+p+4} = \sqrt{x^2+9x+3p+9}$$

en la qual x i p són reals i les arrels quadrades són reals i no negatives. Proveu que, si es compleix (*), aleshores

$$(x^2 + x - p)\left(x^2 + 8x + 2p + 9\right) = 0.$$

Seguidament, trobeu el conjunt de reals p pels quals (*) és satisfeta per exactament un únic real nombre x.

50. Determineu les condicions necessàries i suficients que han de satisfer a, b, c per tal que

$$ax + by + cz = 0$$

i

$$a\sqrt{1-x^2} + b\sqrt{1-y^2} + c\sqrt{1-z^2} = 0$$

admetin una solució real x, y, z amb $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$.

51. Suposeu que reordeneu els nombres naturals $1, 2, \ldots, n, \ldots$ d'acord amb

el primer nombre senar	(és a dir, 1)
el dos nombres parells següents	(és a dir, 2 i 4)
el tres nombres senars següents	(és a dir, $5, 7, 9$)
el quatre nombres parells següents	(és a dir, $10, 12, 14, 16$)
el cinc nombres senars següents	(és a dir, $17, 19, 21, 23, 25$)

i així successivament.

La successió és: $1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, \ldots$. Porveu que n–èsim terme u_n ve donat per l'equació

$$u_n = 2n - \left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right],$$

on $[x]$ designa el nombre sencer més gran més petit que x.

52. Suposeu que u, v, w, x, y, z són nombres reals amb x, y, z tots diferents que satisfan les equacions

$$u^3 + x^3 = v^3 + y^3 = w^3 + z^3 = a^3$$

i

$$u(y-z) + v(z-x) + w(x-y) = 0.$$

Proveu que $uvw + xyz = a^3$. Quina és la situació si $x = y$?

53. Qui és més gran e^π o π^e?

54. Proveu que el nombre de successions de $0-1$ de longitud n que contenen exactement m ocurrències de 01 és $\binom{n+1}{2m+1}$.

55. Resoleu el següent sistema d'equacions amb nombres naturals

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - c^3 &= 3abc \\ a^2 &= 2(b+c). \end{aligned}$$

56. Considereu un quadrat unitat S del pla fixat en posició. Quin és el nombre màxim de quadarts unitat no solapats que poden col·locar-se a l'antorn d'S, tocant-lo però sense solapar-lo?

57. Traingles equilàters de costats $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$ són col·locats damunt d'una recta tocant-se en el vèrtex, com indica la figura. Proveu que els vèrtex que no es troben damunt la recta pertanyen a una paràbola i que els seus radis focals són tots ells sencers.

58. Proveu que els únics nombres sencers x pels quals

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

és un quadrat perfecte són $x = -1, 0$ i 3.

59. Si $P(x)$ és un polinomi de grau n tal que

$$P(x) = 2^x \quad \text{pera} \quad x = 1, 2, 3, \ldots, n+1,$$

trobeu $P(n+2)$.

60. Quin és el romanent quan dividim $x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ per $x^3 - x$?

61. Si la magnitud de la funció quadràtica $f(x) = ax^2 + bx + c$ no excedeix mai 1 quan x recorre l'interval $[0, 1]$, proveu que la suma de les magnituds dels coeficients no pot sobrepassar 17:

$$|a| + |b| + |c| \leq 17.$$

62. Determineu el límit de la successió $\{P_n\}$ definida per $P_1 = 4$ i, per a $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$P_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{P_n}{2^{n+1}}\right)^2}}.$$

63. Considereu dues circunferències C_1 i C_2 i sigui P un punt fix de la zona lenticular R en la qual es tallen les dues circumferències. Sigui UV la corda dins la zona R que passa per P. Determineu la manera de cosntruir la corda per a la qual el producte $PU \cdot PV$ és mínim.

64. Sigui M un conjunt no buit d'enters positius tal que sigui tancat per $4x$ i $[\sqrt{x}]$. Proveu que M és el conjunt dels nombres sencers positius.

65. Considerem la successió definida per

$$x_1 = x, \qquad \text{i per a cada } k \geq 1, \quad x_{k+1} = x_k^2 + x_k,$$

on x és un nombre real ≥ 1. Quin és el valor de la sèrie infinita

$$S = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \cdots ?$$

66. Sigui $-1 \leq u \leq 1$. Determineu el mínim nombre K_u que satisfà la condició

$$|g'(u)| \leq K_u,$$

si $g(t)$ és un polinomi tal que $\mathrm{gr}(g(t)) \leq 2$ i $|g(t)| \leq 1$ per a $-1 \leq t \leq 1$.